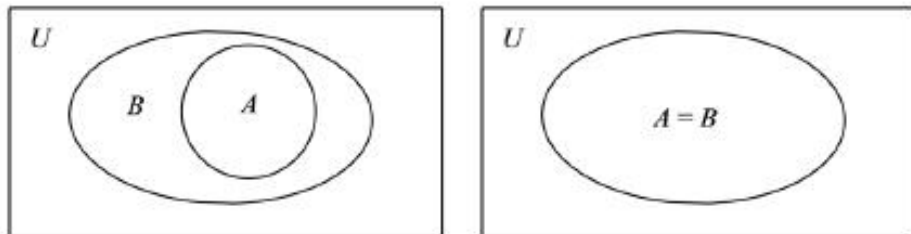


数学保温卷二（参考答案）

1. D

【详解】由 $A \cap \complement_U B = \emptyset$ 知: $A \subseteq B$, 即 A 错误,



$\therefore A \cup B = B$, 即 B 错误; 仅当 $A = B$ 时 $A \cup \complement_U B = U$, 即 C 错误; $B \cup \complement_U A = U$, 即 D 正确. 故选: D.

2. D

【详解】因为 $y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, $e < \sqrt{10}$, 则 $a = \lg e < \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$,

又 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, $0.2 < \frac{1}{3}$, 则 $c = \log_{\frac{1}{3}} 0.2 > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$,

而 $b = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$, 所以 $a < b < c$. 故选: D

3. A

【详解】抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$

其上一一点 $M(4, t)$ 到抛物线的焦点距离为 6, 则 $\left| 4 - \left(-\frac{p}{2}\right) \right| = 6$

解得 $-\frac{p}{2} = -2$, 即抛物线的准线方程为 $x = -2$, 故选: A

4. A

【详解】设分成的两个学习小组为甲组和乙组, 这两个小组只是代号, 没有区别,

若 1, 2 号, 3, 4 号在同一个小组, 那么该小组还差 1 人, 有 $C_6^1 = 6$ 种分组方法;

若 1, 2 号与 3, 4 号在不同的小组, 则其中一个小组还差 3 人, 有 $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 种方

组方法, 所以总共有 $6 + 20 = 26$ 种分组方法, 故选: A.

5. B

【详解】设原数据为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 则 $\sum_{i=1}^6 a_i = 6 \times 4 = 24$, $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (a_i - 4)^2 = 8$

加入 2 和 6 两个新数据后, 所得 8 个数据的平均数为 $\frac{\sum_{i=1}^6 a_i + 2 + 6}{8} = 4$,

所得 8 个数据的方差为 $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (a_i - 4)^2 + (2-4)^2 + (6-4)^2}{8} = \frac{48+4+4}{8} = 7$.

故选: B.

6. C

【详解】由题意 $\angle ACB = 30^\circ$, 则 $\angle AOB = 60^\circ$

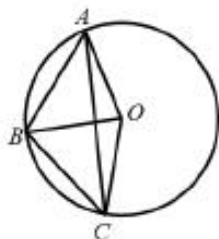
又 $AO = OB = r$, 所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形.

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

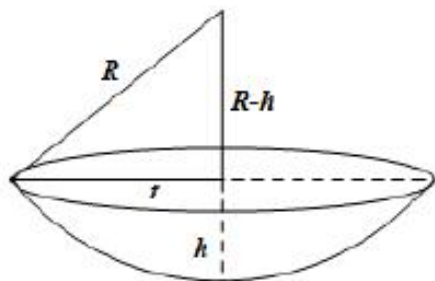
$$= 2 \times 2 \times \cos \angle COB - 2 \times 2 \times \cos \angle AOC = 4[\cos \angle BOC - \cos(60^\circ + \angle BOC)]$$

$$= 4\left(\cos \angle BOC - \frac{1}{2} \cos \angle BOC + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \angle BOC\right) = 4 \sin\left(\angle BOC + \frac{\pi}{6}\right)$$

显然 $0 < \angle BOC < \frac{2\pi}{3}$, 所以当 $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ 时, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$ 有最大值 4, 故选: C



7. B



$$\because 2\pi r = 2\pi, \therefore r = 1,$$

$$\because r^2 + (R-h)^2 = R^2, \text{ 又 } S = 2\pi Rh = 16\pi, \therefore Rh = 8,$$

$$\therefore r^2 = R^2 - \left(R - \frac{8}{R}\right)^2 = 16 - \frac{64}{R^2} = 1, \text{ 解得: } R^2 = \frac{64}{15}, \text{ 即 } R = \frac{8}{15}\sqrt{15}, \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

故选: B

8. C

$\because f(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$,

令 $g(x) = f(x) - \frac{2}{x}$, 则 $g(-x) = f(-x) + \frac{2}{x} = -f(x) + \frac{2}{x} = -g(x)$,

$\therefore g(x)$ 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上奇函数;

$\because f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $y = -\frac{2}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

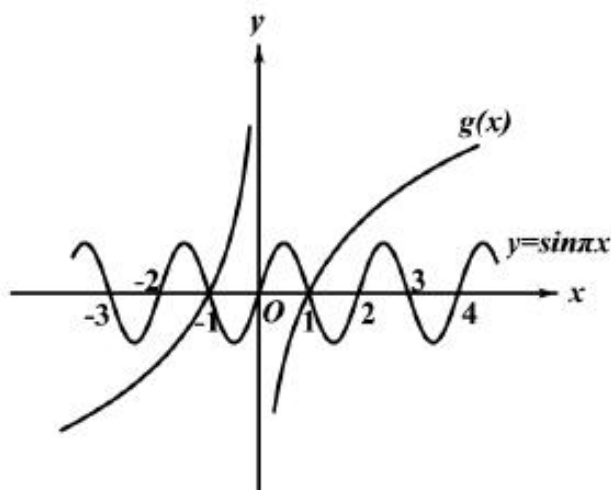
$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 由奇函数性质知: $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

$\because f(-1) = -2, \therefore g(-1) = f(-1) + 2 = 0$, 则 $g(1) = 0$,

又 $f\left(\frac{5}{2}\right) > f(1) = -f(-1) = 2$, 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, $\frac{2}{x} + \sin \pi x = \frac{4}{5} + \sin \frac{5\pi}{2} = \frac{9}{5}$,

\therefore 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, $f(x) < \frac{2}{x} + \sin \pi x$ 不成立, 即 $g\left(\frac{5}{2}\right) < \sin \frac{5\pi}{2}$ 不成立,

由此可在坐标系中画出 $g(x)$ 与 $y = \sin \pi x$ 大致图象如下图所示:



由图象可知: 当 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ 时, $g(x) < \sin \pi x$,

即当 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ 时, $f(x) < \frac{2}{x} + \sin \pi x$. 故选: C.

9. AB

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8 + c^2 - 2}{2 \times 2\sqrt{2}c} = \frac{6 + c^2}{4\sqrt{2}c} = \frac{3\sqrt{2}}{4c} + \frac{\sqrt{2}c}{8} \geq 2\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4c} \cdot \frac{\sqrt{2}c}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

当且仅当 $\frac{3\sqrt{2}}{4c} = \frac{\sqrt{2}c}{8}$, $c = \sqrt{6}$ 时等号成立, 所以 $\cos B \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, $B \in (0^\circ, 30^\circ]$,

所以 AB 选项正确, CD 选项错误. 故选: AB (法二: 利用正弦定理)

10. BD

【详解】对于 A, 若 $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 A 错误;

对于 B, 若 $m \parallel \alpha$, $m \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = n$, 则由线面平行的性质得 $m \parallel n$, 故 B 正确;

对于 C, 若 $m \perp \alpha$, $m \perp n$, $\alpha \parallel \beta$, 则 $n \parallel \beta$ 或 $n \subset \beta$, 故 C 错误;

对于 D, 若 $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, $m \perp n$, 则由面面垂直的判定定理得 $\alpha \perp \beta$, 故 D 正确.

故选: BD.

11. BCD

【详解】对于 A, 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 如 $a_n = n$, 则 $a_n^2 = n^2$

则 $(a_n^2)^2 - (a_{n-1}^2)^2 = n^4 - (n-1)^4 = (2n^2 - 2n + 1)(2n - 1)$ 不是常数, 故 $\{a_n\}$ 不是等方差数列, 故 A 错误;

对于 B, 数列 $\{(-1)^n\}$ 中, $a_n^2 - a_{n-1}^2 = [(-1)^n]^2 - [(-1)^{n-1}]^2 = 0$ 是常数,

$\therefore \{(-1)^n\}$ 是等方差数列, 故 B 正确;

对于 C, 数列 $\{a_n\}$ 中的项列举出来是, $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{2k}, \dots$

数列 $\{a_{kn}\}$ 中的项列举出来是, $a_k, a_{2k}, a_{3k}, \dots$,

$$\because (a_{k+1}^2 - a_k^2) = (a_{k+2}^2 - a_{k+1}^2) = (a_{k+3}^2 - a_{k+2}^2) = \dots = (a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2) = p,$$

将这 k 个式子累加得 $(a_{k+1}^2 - a_k^2) + (a_{k+2}^2 - a_{k+1}^2) + (a_{k+3}^2 - a_{k+2}^2) + \dots + (a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2) = kp$,

$\therefore a_{2k}^2 - a_k^2 = kp$, $\therefore a_{k(n+1)}^2 - a_{kn}^2 = kp$, $\therefore \{a_{kn}\} (k \in \mathbb{N}^*, k \text{ 为常数})$ 是等方差数列, C 正确;

对于 D, $\because \{a_n\}$ 是等差数列, $\therefore a_n - a_{n-1} = d$, 则设 $a_n = dn + m$

$\therefore \{a_n\}$ 是等方差数列,



$\therefore a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n + a_{n-1})d = (dn + m + dn + d + ma)d = 2d^2n + (2m + d)d$ 是常数,

故 $2d^2 = 0$, 故 $d = 0$, 所以 $(2m + d)d = 0$, $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 0$ 是常数, 故 D 正确.

故选: BCD.

12. ACD

A 选项, 设双曲线 E 的一条渐近线的倾斜角为 θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 因为 $a > b$, 所以 $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$,

从而 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2\sqrt{2}$, 解得 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\tan \theta = -\sqrt{2}$ (舍去), 所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $a^2 + b^2 = 9$, 所以 $a^2 = 6$, $b^2 = 3$, 所以双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$, 故 A 正确;

B 选项, 直线 l 的方程 $kx - y - 3k = 0$, 即 $k(x - 3) - y = 0$, 则直线 l 恒过右焦点 F_2 , 又过

焦点 F_2 的弦最短为 $\frac{2b^2}{a} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, 所以满足 $|AB| = \sqrt{6}$ 的直线 l 只有 1 条, B 错误;

C 选项, 由双曲线的定义可知, $|AF_1| - |AF_2| = 2\sqrt{6} = |BF_1| - |BF_2|$, 即

$|AF_1| - |BF_1| = |AF_2| - |BF_2|$, 因此 F_2 是 $\triangle F_1AB$ 的内切圆在 AB 边上的切点, 因此 $IF_2 \perp AB$,

C 正确;

D 选项, 由题知

$$\frac{S_{\triangle F_2AB}}{S_{\triangle IAB}} = \frac{\frac{1}{2}|IF_2| \cdot (|AF_1| + |BF_1| + |AB|)}{\frac{1}{2}|IF_2| \cdot |AB|} = \frac{2\sqrt{6} + |AF_2| + 2\sqrt{6} + |BF_2| + |AB|}{|AB|} = \frac{4\sqrt{6}}{|AB|} + 2, \text{ 因}$$

为 $|AB| \geq \sqrt{6}$, 所以 $\frac{S_{\triangle F_2AB}}{S_{\triangle IAB}} \in (2, 6]$, D 正确.

13. $-\frac{1}{2}$

【详解】由题意, 角 θ 的终边经过点 $P(\sqrt{2}, a)$, 可得 $|OP| = \sqrt{2 + a^2}$.

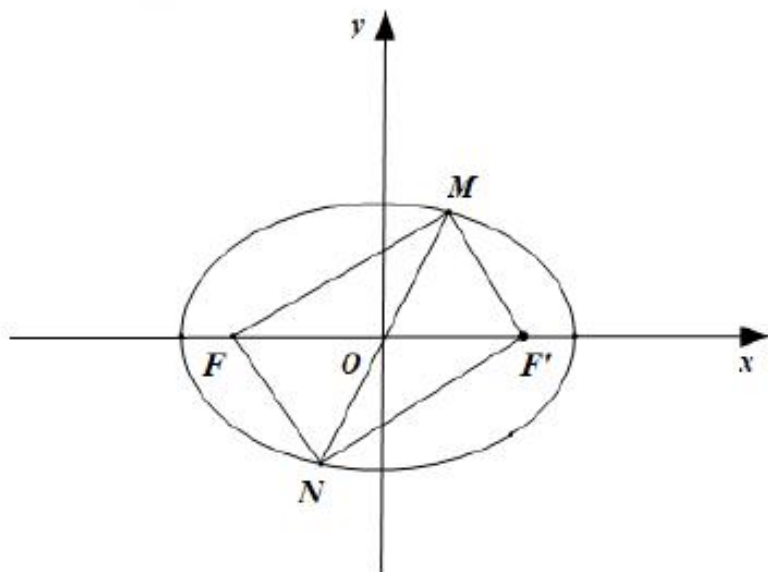
又由 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$, 得 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$,

根据三角函数的定义, 可得 $\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{2 + a^2}} = -\frac{1}{3}$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$. 故答案为: $-\frac{1}{2}$

14. $1+2i$ (答案不唯一).

【详解】设 $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$), 则 $z^2+3=a^2-b^2+3+2abi$, 因为 z^2+3 为纯虚数, 所以 $a^2-b^2=-3$ 且 $ab \neq 0$. 任取不为零的实数 a , 求出 b 即可得, 答案不确定, 如 $z=1+2i$, 故答案为: $1+2i$.

15. $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$



解: 设右焦点为 F' , 由题意可得直线 l 的方程为: $y=\sqrt{3}x$, 设 $M(x_0, y_0)$, $N(-x_0, -y_0)$, 连接 MF' , NF' , 因为 $\angle MFN = \frac{2\pi}{3}$, 故四边形 $FMF'N$ 为平行四边形, 则 $\angle FMF' = \frac{\pi}{3}$, 所以 $4c^2 = |MF|^2 + |MF'|^2 - 2|MF||MF'| \cos \frac{\pi}{3}$,

整理得到 $4c^2 = (|MF| + |MF'|)^2 - 3|MF||MF'|$ 即 $|MF||MF'| = \frac{4b^2}{3}$,

故 $S_{\triangle MF'F} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4b^2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} b^2 = \frac{1}{2} \times 2c \times |y_0|$,

所以可得 $y_0 = \frac{\sqrt{3}b^2}{3c}$, 代入直线 l 的方程可得 $x_0 = \frac{b^2}{3c}$,

将 M 的坐标代入椭圆的方程可得: $\frac{b^4}{9c^2} + \frac{b^2}{3c^2} = 1$,

整理可得: $4a^4 - 14a^2c^2 + c^4 = 0$, 即 $e^4 - 14e^2 + 4 = 0$,



解得: $e^2 = 7 \pm 3\sqrt{5}$, 由椭圆的离心率 $e \in (0,1)$, 所以 $e = \sqrt{7-3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$,

故答案为: $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$.

16. 0.63 150

【详解】每份保单不需要赔付的概率是 $1-10^{-5}$, 则 10 万份保单不需要赔付的概率

$$p = (1-10^{-5})^{10^5} \approx 0.37; \text{ 需赔付的概率是 } 1-0.37 = 0.63$$

设 10 万份保单中需赔付的件数, 设为 X , 则 $X \sim B(10^5, 10^{-5})$, 则需赔付的保险金为

$$500000X, \text{ 则 } E(500000X) = 500000 \times 10^5 \times 10^{-5} = 500000,$$

则一年内的盈利的期望是 $20 \times 10^5 - 500000 = 1500000$ (元) = 150 (万元)

故答案为: 0.63; 150

17. (1) $a_n = 2^n$; (2) $T_n = -1 - \frac{2n-1}{2^n}$.

【详解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 $a_2, a_3, 6a_1$ 成等差数列, 所以 $a_2 + 6a_1 = 2a_3$, 则 $2q^2 - q - 6 = 0$,

又 $q > 0$, 所以 $q = 2$. 又因为 $a_3 - a_2 = 4$, 所以 $a_1 = 2$,

所以 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$;

(2) 由题可知 $c_n = \frac{\log_2 a_{2n} - 5}{a_n} = \frac{2n-5}{2^n}$,

$$\text{则 } T_n = \frac{-3}{2} + \frac{-1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{2n-5}{2^n}, \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{-3}{2^2} + \frac{-1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{2n-7}{2^n} + \frac{2n-5}{2^{n+1}}, \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{2}T_n = \frac{-3}{2} + 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2n-5}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2} + \frac{1-2n}{2^{n+1}}.$$

$$\text{故 } T_n = -1 - \frac{2n-1}{2^n}.$$

18. (1) $\left[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}\right] (k \in \mathbb{Z})$; (2) $[1, \sqrt{2}]$.



【详解】(1) 由题意可得, $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + 3 = 2 \cos \omega x (\sin \omega x - \cos \omega x) - 2 + 3$,
 $= 2 \sin \omega x \cos \omega x - 2 \cos^2 \omega x + 1 = \sin 2\omega x - \cos 2\omega x = \sqrt{2} \sin(2\omega x - \frac{\pi}{4})$.

由题意知, $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 得 $\omega = 1$, 则 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 由

$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$, $\therefore f(x)$ 的单调

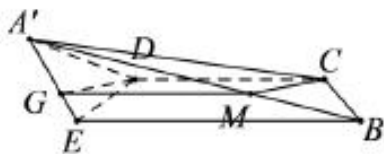
递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbb{Z})$.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到 $y = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象,

纵坐标不变, 横坐标伸长为原来的 2 倍, 得到 $g(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的图象.

$\because x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 故函数 $g(x)$ 的值域为 $[1, \sqrt{2}]$.

19. 【详解】(1) 取 $A'E$ 的三等分点 G 且 $A'G = \frac{2}{3}A'E$, 连接 GM, DG ,



$\because BM = \frac{1}{3}BA'$, $\therefore GM \parallel BE$ 且 $GM = \frac{2}{3}BE$.

在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 60^\circ$, $AD = DC = BC = 1$, $DE \perp AB$,

$\therefore DC \parallel BE$ 且 $DC = \frac{2}{3}BE$,

$\therefore DC \parallel GM$ 且 $DC = GM$, 即四边形 $DCMG$ 为平行四边形,

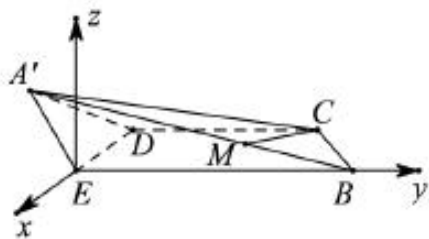
$\therefore DG \parallel CM$, 又 $DG \subset$ 平面 $A'DE$, $CM \not\subset$ 平面 $A'DE$,

$\therefore CM \parallel$ 平面 $A'DE$.

(2) 法一: $\because DE \perp AB$, $\triangle DAE$ 沿 DE 翻折到 $\triangle DA'E$ 的位置,

$\therefore DE \perp$ 平面 $A'BE$, 又二面角 $A'-DE-B$ 的大小为 120° , 即 $\angle A'EB = 120^\circ$.

以 E 为坐标原点, DE, EB 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 E 且垂直于平面 $EBCD$ 的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



$$\therefore C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right), D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), A'\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \text{ 则 } \overrightarrow{A'D} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

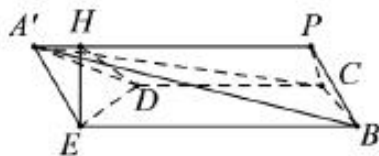
$$\overrightarrow{DC} = (0, 1, 0).$$

$$\text{设 } \vec{m} = (x, y, z) \text{ 是面 } A'DC \text{ 的法向量, 则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A'D} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}z = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1,$$

得 $\vec{m}_1 = (1, 0, -2)$. 易知: 平面 $A'BE$ 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (1, 0, 0)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 即面 } A'BE \text{ 和面 } A'DC \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

法二: 过 A' 作 $A'P \parallel BE$, 则 $A'P \parallel CD$, 过 E 作 $EH \perp A'P$ 于 H , 连接 HD , 则 $DH \perp A'P$,



$\therefore \angle DHE$ 为面 $A'BE$ 和面 $A'DC$ 所成锐二面角的平面角.

$$\text{在 } Rt\triangle DEH \text{ 中, } DE = \frac{\sqrt{3}}{2}, EH = \frac{\sqrt{3}}{4}, HD = \sqrt{DE^2 + EH^2} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore \cos \angle DHE = \frac{EH}{HD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 即面 } A'BE \text{ 和面 } A'DC \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

20. 【详解】(1) 由题意, 函数 $f(x) = xe^x - \frac{1}{2}a(x^2 + 2x - 2)$,

$$\text{可得 } f'(x) = (x+1)e^x - a(x+1) = (x+1)(e^x - a).$$

①当 $a \leq 0$ 时, 若 $x < -1$, 则 $f'(x) < 0$, 若 $x > -1$, 则 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上是减函数, 在区间 $(-1, +\infty)$ 上是增函数.



所以当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(-1) = -e^{-1} + \frac{3}{2}a$, 无极大值,

②当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 若 $x < \ln a$ 或 $x > -1$, 则 $f'(x) > 0$, 若 $\ln a < x < -1$, 则 $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln a)$ 上是增函数, 在区间 $(\ln a, -1)$ 上是减函数, 在区间 $(-1, +\infty)$ 上是增函数,

所以当 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(\ln a) = a - \frac{1}{2}a(\ln a)^2$,

当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(-1) = -e^{-1} + \frac{3}{2}a$.

③当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) \geq 0$, $\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore f(x)$ 既无极大值又无极小值.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(-1) = -e^{-1} + \frac{3}{2}a$, 无极大值;

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 有极大值 $f(\ln a) = a - \frac{1}{2}a(\ln a)^2$, 极小值 $f(-1) = -e^{-1} + \frac{3}{2}a$;

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 既无极大值又无极小值

(2) 由题知, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 + a < 0$,

设 $h(x) = x e^x - \ln x - x + a$, 则 $h'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$,

设 $m(x) = e^x - \frac{1}{x} (x > 0)$,

$\therefore m(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又 $m\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$, $m(1) = e - 1 > 0$,

\therefore 存在 $x_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $m(x_1) = 0$, 即 $e^{x_1} = \frac{1}{x_1}$, $\therefore x_1 = -\ln x_1$,

当 $0 < x < x_1$ 时, $m(x) < 0$, 即 $h'(x) < 0$, 当 $x > x_1$ 时, $m(x) > 0$, 即 $h'(x) > 0$,

$\therefore h(x)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上是减函数, 在区间 $(x_1, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_1) = x_1 e^{x_1} - \ln x_1 - x_1 + a = x_1 \times \frac{1}{x_1} + x_1 - x_1 + a = a + 1$, $\therefore a + 1 < 0$, \therefore

$a < -1$,

\therefore 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》