长沙市一中2023届模拟试卷(二)

数学参考答案

一、单项选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	B	A	D	D	B

1.B 【解析】因为 $A=\{x|x^2-2x-3>0\}$,所以 $\complement_U A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,
因为 $B=\{x|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$,所以 $(\complement_U A)\cap B=\{0,2\}$,故选:B.

2.C 【解析】将函数 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,得到 $y=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\omega+\varphi\right)$ 的图象,再将横坐标伸长到原来的2倍,纵坐标不变,得到 $y=\sin\left(\frac{\omega}{2}x-\frac{\pi}{6}\omega+\varphi\right)$ 的图象,由于得到的函数的图象与 $y=\cos x$ 图象重合,

故 $\omega=2$,$-\frac{\pi}{6}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.故选C.

3.B 【解析】将直线方程变形为 $l:(x+y-7)+(3x-2y-1)\lambda=0$,知直线过定点 $Q(3,4)$,故原点到直线 l 距离的最大值为5,则 P 点到直线 l 的距离的最大值为6,故选B.

4.B 【解析】$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3=-1$.故选B.

5.A 【解析】$\boldsymbol{m}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}\cdot\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{n}$.故选A.

6.D 【解析】设沙漏的底面半径为 r,高为 h,则沙的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h$,当沙池中沙的高度漏至一半时,所剩余的沙形成的圆锥的高为 $\frac{1}{2}h$,底面半径为 $\frac{1}{2}r$,所以所剩余的沙的体积为 $\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}r\right)^2\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}\pi r^2h$,所以漏下的沙子体积为总体积的 $\frac{7}{8}$,故记时时间为 $\frac{7}{8}$ 小时.故选:D.

7.D 【解析】选项A,由图象可知 $|A_2A_3|=|P_2M_3|=a_1q^2$,故A正确;
选项B,因为直线 $OQ:y=qx$ 斜率为 q,故B正确;
选项C,点 A_n 的横坐标为 $|OA_1|+|A_1A_2|+\cdots+|A_{n-1}A_n|=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=S_n$,故C正确;
选项D,$P_nA_n=S_{n+1}-a_1$,故D错误.

8.B 【解析】因为球的体积为 $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$,故球的半径 R 满足 $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi=\frac{4\pi}{3}R^3$,故 $R=\sqrt{5}$,

而 $AB=4$,$AC=2$,$BC=2\sqrt{3}$,故 $AB^2=AC^2+BC^2$,故 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$,故 $S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$,

设点 D 到平面 ABC 的距离为 h,则 $\frac{1}{3}\times h\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,故 $h=3$,故点 D 在球的截面圆上,设截面圆所在的平面为 α,

因为 $h>R$,所以平面 α 与平面 ABC 在球心的异侧,

设球心到平面 ABC 的距离为 d,而 $\triangle ACB$ 外接圆的半径为 $\frac{1}{2}AB=2$,则 $d=\sqrt{5-4}=1$,

故球心到平面 α 的距离为2,故截面圆的半径 $\sqrt{5-4}=1$,
设点 D 在平面 ABC 上的投影为 E,则 E 的轨迹为圆,圆心为 $\triangle ABC$ 的外心即 AB 的中点,
当 CE 最长时 CD 最长,此时 $CE=2+1=3$,故 CD 长度的最大值为 $3\sqrt{2}$,故选B.

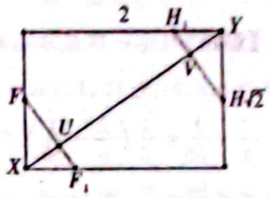
二、多项选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.)

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	ABD	ACD

9.BC 【解析】$f(x)$ 为偶函数,$f(x-2)=-f(x)$,
所以 $f(x-2)+f(x)=0$,所以 $f(-2+x)+f(-x)=0$,

所以$f(x)$关于点$(-1,0)$对称，A 错误；
又$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以$f(x+4)=f(x)$，B 正确；
因为$f(x)$在$[0,1]$上是增函数，
所以$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{15}{4}\right)$，故 C 正确；
因为$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，
所以$\sum_{n=1}^{2023}f(n)=f(1)+(2)+f(3)=f(2)$，而$f(2)$的值不确定，故 D 错误，故选 BC.

10. ABD 【解析】该多面体的面由 6 个边长为 1 的正方形和 8 个边长为 1 的正三角形构成，



故表面积为$6\times1^2+8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=6+2\sqrt{3}$，故 A 正确；

利用割补法求该多面体的体积，$V=(\sqrt{2})^3-8\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{5\sqrt{2}}{3}$，故 B 正确；

注意到该多面体的原正方体边长为$\sqrt{2}$，故上下两个面的距离为$\sqrt{2}$，而两个正三角形所在的平行平面间的距离是$\sqrt{6}-2\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$（体对角线垂直正三角形所在平面，体对角线长减去两个正三棱锥的高），故 C 错误；

过 A、Q、G 三点的平面截得的截面图形是一个边长为 1 的正六边形，故截面面积为$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确.

11. ABD 【解析】对于 A 选项，抽奖人在不知道奖品在哪个箱子的情况下选择了 1 号箱，他的选择不影响奖品在四个箱子中的概率分配，因此A_1，A_2，A_3，A_4的概率均为$\frac{1}{4}$，即 A 正确；

对于 B 选项，奖品在 2 号箱里，主持人只能打开 3、4 号箱，故$P(B_3|A_2)=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C、D 选项，

方法一：奖品在 1 号箱里，主持人可打开 2、3、4 号箱，故$P(B_3|A_1)=\frac{1}{3}$，

奖品在 2 号箱里，主持人只能打开 3、4 号箱，故$P(B_3|A_2)=\frac{1}{2}$，

奖品在 3 号箱里，主持人打开 3 号箱的概率为 0，故$P(B_3|A_3)=0$，

奖品在 4 号箱里，持人只能打开 2、3 号箱，故$P(B_3|A_4)=\frac{1}{2}$，由全概率公式可得：

$P(B_3)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B_3|A_i)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$，$P(A_1|B_3)=\frac{P(A_1B_3)}{P(B_3)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$，$P(A_2|B_3)=\frac{P(A_2B_3)}{P(B_3)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}>\frac{1}{4}$，故 C 错误，D 正确，因此答案为 ABD.

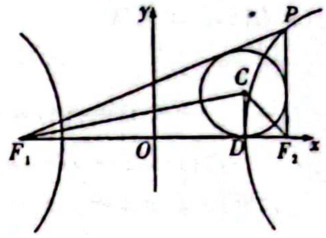
方法二：若继续选择 1 号箱，有奖品的概率为$\frac{1}{4}$，无奖品的概率为$\frac{3}{4}$，主持人打开了无奖品的 3 号箱，若不换号，则甲在 1 号箱获得奖品的概率依然为$\frac{1}{4}$，而在排除了 3 号箱有奖的情况下，2 号或者 4 号箱获奖的概率会提高，因此为了增加中奖的概率，甲应该改选 2 号或者 4 号箱.

12. ACD 【解析】由抛物线的光学性质可知，直线AB过抛物线的焦点$F(1,0)$，
设直线AB的方程为$x=ty+1$，
将直线AB的方程代入$y^2=4x$中，得$y^2-4ty-4=0$，
所以$y_1y_2=-4$，所以$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=1$，故选项 A 正确；
若点$A(x_1,y_1)$关于x轴的对称点在直线l_2上，则$y_1=-y_2$，
所以$|y_1|=|y_2|=2$，即$|n|=2$，不一定成立，故不合题意，选项 B 错误；
直线l_2与$x=-1$于相交于点$D(-1,y_2)$，所以直线OD的斜率为$k_{OD}=-y_2$，
又直线OA的斜率为$k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_1}=-y_2$，所以$A,O,D$三点共线，故选项 C 正确；

直线l_1与l_2间的距离$d=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16t^2+16}\geq4$，
当$t=0$时，d取最小值 4，故选项 D 正确，故选 ACD.

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.)

13. 15 【解析】$a_4=1+2+3+4+5=15$.



14. $\frac{1}{3}$ 【解析】根据题意可得$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则两角的角平分线的交点一定为$\triangle PF_1F_2$的内心. 如图所示，因此$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{CD}{F_1D}$，$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{CD}{F_2D}$，所以$\tan\frac{\alpha}{2}:\tan\frac{\beta}{2}$

$=\frac{r}{a+c}\cdot\frac{c-a}{r}=\frac{c-a}{c+a}=\frac{1}{3}$.

15. $\frac{16}{3}$ 【解析】因为一位篮球运动员投篮一次得 3 分概率为 a，得 2 分概率为 b，不得分的概率为 c，$a,b,c\in(0,1)$，且 $a+b+c=1$，已知他投篮一次得分的数学期望为 2，则 $3a+2b=2$，

所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}\right)(3a+2b)=\frac{1}{2}\left(\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+6+\frac{2}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+6+\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3}$，

当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $b=\frac{1}{4}$，$a=\frac{1}{2}$时取等号，所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}$的最小值为$\frac{16}{3}$. 故答案为：$\frac{16}{3}$.

16. 3 【解析】假设存在一条直线与曲线 $y=f(x)$和 $y=g(x)$均相切，且切点分别为(x_1,ae^{x_1})，$(x_2,a\ln x_2+b)$，

则由 $f'(x)=ae^x$，$g(x)=\frac{a}{x}$，

有 $ae^{x_1}=\frac{a}{x_2}=\frac{ae^{x_1}-a\ln x_2-b}{x_1-x_2}$，即 $e^{x_1}=\frac{1}{x_2}=\frac{e^{x_1}-\ln x_2-\frac{b}{a}}{x_1-x_2}$，

因此 $e^{x_1}=\frac{e^{x_1}+x_1-\frac{b}{a}}{x_1-e^{-x_1}}$，所以$\frac{b}{a}=(1-x_1)e^{x_1}+1+x_1$，

令 $h(x)=(1-x)e^x+1+x$，则 $h'(x)=1-xe^x$，易知存在 $x_0\in\left[\frac{1}{2},1\right]$使得 $1-x_0e^{x_0}=0$，

故当 $x\in(-\infty,x_0)$时，$h(x)$单调递增，当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$h(x)$单调递减，

因此 $h(x)_{max}=h(x_0)=(1-x_0)e^{x_0}+1+x_0=x_0+\frac{1}{x_0}\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，

所以使得不等式$\frac{b}{a}<m$恒成立的最小整数 m 的值是 3.

四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.【解析】(1) $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2b^2\sin C=16\sin C=12\Rightarrow\sin C=\frac{3}{4}$，

而 $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C=-\frac{\sin C}{\cos C}$，

分情况讨论，当 C 为锐角时，$\cos C>0\Rightarrow\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\therefore\tan(A+B)=-\frac{3}{7}\sqrt{7}$，

当 C 为钝角时，$\cos C<0\Rightarrow\cos C=-\sqrt{1-\sin^2C}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\tan(A+B)=\frac{3}{7}\sqrt{7}$.

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2b^2\sin C=\frac{3}{5}b^2=12$，因为 $b>0$，所以 $b=2\sqrt{5}\Rightarrow a=4\sqrt{5}$，

C 为锐角时，$\cos C>0\Rightarrow\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\frac{4}{5}$，

由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=36\Rightarrow c=6$，

由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{4\sqrt{5}}{\sin A}=\frac{2\sqrt{5}}{\sin B}=10\Rightarrow\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18.【解析】(1)如图，取 BC 中点 H，连接 EH，因为 $EB=EC$，所以 $EH\perp BC$，

又因为平面 $BCE\perp$平面 BCD，平面 $BCE\cap$平面 $BCD=BC$，$EH\subset$平面 BCE，

所以 $EH\perp$平面 BCD，

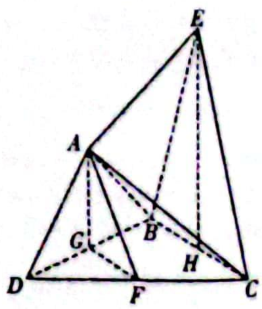
同理可得 $AG\perp$平面 BCD，所以 $EH/\!/AG$，

又因为 $AG\not\subset$平面 BCE，$EH\subset$平面 BCE，所以 $AG/\!/$平面 BCE，

因为点 F,G 分别是 CD,BD 中点，所以 $FG/\!/BC$，

又因为 $FG\not\subset$平面 BCE，$BC\subset$平面 BCE，所以 $FG/\!/$平面 BCE，

又因为 $AG\cap FG=G$，$AG,FG\subset$平面 AFG，所以平面 $AFG/\!/$平面 BCE.



(2)方法一：因为 $BC\perp BD$，$BC/\!/FG$，所以 $FG\perp BD$，

由(1)知 $AG\perp BD$，$AG\perp$平面 BCD，$GF\subset$平面 BCD，

所以 $AG\perp GF$，所以 GF,GB,GA 两两相互垂直，

如图，以点 G 为坐标原点，GF,GB,GA 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

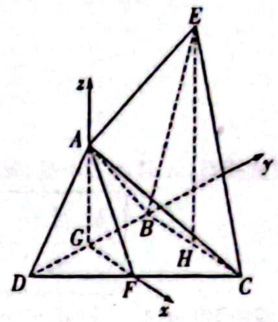
因为 $AB=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{5}$，所以 $GA=GB=1$，$EH=2$，$BH=1$，

则 $A(0,0,1)$，$C(2,1,0)$，$E(1,1,2)$，

平面 AFG 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$，

设平面 ACE 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

由 $\overrightarrow{AC}=(2,1,-1)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,0,2)$，



得 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{CE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ -x+2z=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} y=-\dfrac{3x}{2}, \\ z=\dfrac{x}{2}, \end{cases}$

取 $x=2$，得 $n=(2,-3,1)$，

设平面 AFG 和平面 ACE 的夹角为 θ，

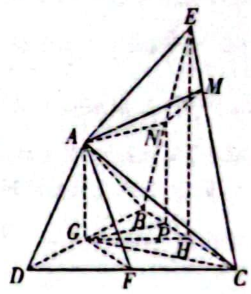
则 $\cos\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{DB}\rangle|=\dfrac{|n\cdot\overrightarrow{DB}|}{|n||\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{6}{2\times\sqrt{14}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，

所以平面 AFG 和平面 ACE 的夹角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

方法二：因为平面 AFG∥平面 BCE，所以平面 AFG 和平面 ACE 的夹角即二面角 $A-CE-B$.

如图，过点 A 作 $AM\perp CE$，垂足为点 M，过点 M 作 $MN\perp EC$ 交 BE 于点 N，

则 $\angle AMN$ 为二面角 $A-CE-B$ 所成平面角.



在 $Rt\triangle BCG$ 中，$GC=\sqrt{BG^2+BC^2}=\sqrt{5}$，

在 $Rt\triangle ACG$ 中，$AC=\sqrt{AG^2+GC^2}=\sqrt{6}$，

因为 AG∥EH，所以四边形 $AGHE$ 为直角梯形，又 $CD=\sqrt{DB^2+CB^2}=2\sqrt{2}$，所以 $GH=\dfrac{1}{2}DC=\sqrt{2}$，

所以 $AE=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，

在 $\triangle ACE$ 中，$\cos\angle ACE=\dfrac{AC^2+CE^2-AE^2}{2\cdot AC\cdot CE}=\dfrac{4}{\sqrt{30}}$，

所以 $\sin\angle ACE=\sqrt{1-\dfrac{16}{30}}=\sqrt{\dfrac{14}{30}}$，

由三角形等面积法可得 $S_{\triangle ACE}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot CE\cdot\sin\angle ACE=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\dfrac{14}{30}}=\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot CE=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\cdot AM$.

所以 $AM=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$，$EM=\sqrt{3-\dfrac{14}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

因为 $\cos\angle BEC=2\cos^2\angle BEH-1=\dfrac{3}{5}$，所以 $EN=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$MN=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$，

过点 N 作 $NP\perp BC$ 于 P，连接 GP，$\dfrac{BN}{BE}=1-\dfrac{EN}{BE}=\dfrac{2}{3}$，则 $BP=\dfrac{2}{3}BH=\dfrac{2}{3}$，$NP=\dfrac{2}{3}EH=\dfrac{4}{3}$，$GP=\sqrt{GB^2+BP^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，

所以在直角梯形 $AGPN$ 中，$AN=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$，

在 $\triangle AMN$ 中，$AN=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$，$AM=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$，$MN=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$，

所以 $\cos\angle AMN=\dfrac{\dfrac{14}{5}+\dfrac{16}{45}-\dfrac{14}{9}}{2\times\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{4\sqrt{5}}{15}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，

所以平面 AFG 和平面 ACE 夹角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

19.【解析】(1)因为 $S_n+T_n=S_n\cdot T_n(n\in N^*)$，

当 $n=1$ 时，$S_1+T_1=S_1\cdot T_1\Rightarrow 2a_1=a_1^2$，解得 $a_1=2$ 或 $a_1=0$，又 $S_n\neq0$，所以 $a_1\neq0$，故 $a_1=2$，

由 $S_n+T_n=S_n\cdot T_n$，可得 $S_n\neq1$，所以 $T_n=\dfrac{S_n}{S_n-1}$，

当 $n\geq2$ 时，$T_{n-1}=\dfrac{S_{n-1}}{S_{n-1}-1}$，

所以$\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{S_n}{S_n-1}\times\frac{S_{n-1}-1}{S_{n-1}}$，即$S_n=\frac{S_n}{S_n-1}\times\frac{S_{n-1}-1}{S_{n-1}}$，

所以$\frac{1}{S_n-1}=\frac{S_{n-1}}{S_{n-1}-1}=1+\frac{1}{S_{n-1}-1}$，所以$\frac{1}{S_n-1}-\frac{1}{S_{n-1}-1}=1$，

所以$\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$是以$\frac{1}{S_1-1}=1$为首项，1为公差的等差数列；

(2)所以$\frac{1}{S_n-1}=1+(n-1)\times1=n$，则$S_n=\frac{n+1}{n}$，

因为$b_n=\frac{1}{n^2S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

故$M=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)=\frac{2023}{2024}$.

20.【解析】(1)由题意得$\bar{x}=\frac{880}{5}=176$，$\bar{y}=\frac{885}{5}=177$，

$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{156045-5\times176\times177}{155450-5\times176^2}=\frac{285}{570}=0.5$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}=177-0.5\times176=89$，

所以回归直线方程为$\hat{y}=0.5x+89$，

令$0.5x+89-x>0$得$x<178$，即$x<178$时，儿子比父亲高；

令$0.5x+89-x<0$得$x>178$，即$x>178$时，儿子比父亲矮，

可得当父亲身高较高时，儿子平均身高要矮于父亲，

即儿子身高有一个回归，回归到全种群平均高度的趋势.

(2)$\hat{y}_1=169$，$\hat{y}_2=174$，$\hat{y}_3=176.5$，$\hat{y}_4=181.5$，$\hat{y}_5=184$，所以$\sum\limits_{i=1}^{5}\hat{y}_i=885$，

又$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=885$，所以$\sum\limits_{i=1}^{5}\hat{e}_i=0$，

结论：对任意具有线性相关关系的变量$\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{e}_i=0$，

证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{e}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}x_i-\hat{a})=n\bar{y}-n\hat{b}\cdot\bar{x}-n(\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x})=0$.

21.【解析】(1)因为椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$D(0,-1)$，所以$b^2=1$，又椭圆有两个顶点所在直线的斜率为$\frac{1}{2}$，

则$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，所以$a=2$，故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

由题意过椭圆左顶点A的直线l与椭圆C交于点M，$A(-2,0)$，

可知直线的斜率存在，不妨设为k，则直线l的方程为$y=k(x+2)$，

由$\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0(*)$，

设$M(x_1,y_1)$，则-2，x_1是方程$(*)$的两个根，所以$x_1=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$，故$M\left(\frac{2-8k^2}{1+4k^2},\frac{4k}{1+4k^2}\right)$，

所以$|AM|=\sqrt{\left(\frac{2-8k^2}{1+4k^2}+2\right)^2+\left(\frac{4k}{1+4k^2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，点$D(0,-1)$到直线$y=k(x+2)$的距离$d=\frac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$，

因为$\triangle AMD$的面积为$\frac{6}{5}$，所以$\frac{1}{2}\times|AM|\times d=\frac{6}{5}$，

即$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\times\frac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{6}{5}$，解得$k=-\frac{1}{6}$或$k=1$.

所以直线l的方程为$y=-\frac{1}{6}(x+2)$或$y=x+2$，即$x+6y+2=0$或$x-y+2=0$.

(2)由(1)可知直线l的方程为$y=k(x+2)$，$N(0,2k)$，$|AM|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，所以$|AN|=\sqrt{4+4k^2}=2\sqrt{1+k^2}$，

设直线OP的方程为$y=kx$，

由$\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2-4=0$，设$P(x_0,y_0)$，则$x_0^2=\frac{4}{1+4k^2}$，则$y_0^2=\frac{4k^2}{1+4k^2}$，

所以$|OP|^2=x_0^2+y_0^2=\frac{4+4k^2}{1+4k^2}$，故$\frac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|^2}=\frac{\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\times2\sqrt{1+k^2}}{\frac{4+4k^2}{1+4k^2}}=2$.

因此$\dfrac{|AM|\cdot|AN|}{|OP|^2}$为定值.

22.【解析】(1)因为$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2+ax+a\ln x\right)e^{1-x}$,

所以$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+(a-1)\ln x$,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=x+a+\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x+a-1)}{x}$.

当$a\geqslant1$时,$f'(x)\geqslant0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当$a<1$时,若$x\in(0,1-a)$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

若$x\in(1-a,+\infty)$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

(2)选①:因为$g(x)=(x+1)e^{1-x}\ln x$,

所以$f(x)=x\ln x$,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,且$f'(x)=1+\ln x$.

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当$x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

不妨设$0<m<n$,则$m\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$,由$f(m)=f(n)<0$,可知$\dfrac{1}{e}<n<1$,

当$\dfrac{1}{e}<n\leqslant1-\dfrac{1}{e}$时,$m+n<1$显然成立.

当$1-\dfrac{1}{e}<n<1$时,$1-n\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$,由$m\ln m=n\ln n$,且$m\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$,

可知$m(1+\ln m)=m\ln(em)<0$,则$m<-m\ln m$,$m+n<-m\ln m+n=-n\ln n+n$.

设$\varphi(x)=x(1-\ln x)$,$x\in\left(1-\dfrac{1}{e},1\right)$,$\varphi'(x)=-\ln x>0$,

所以$\varphi(x)<1(1-\ln 1)=1$,所以$m+n<1$成立.

综上所述,$m+n<1$.

选②:$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left[x(x-\ln x)+\dfrac{1}{x}\right]-\ln x$.

设$h(x)=x-\ln x$,则$h'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

当$x\in(0,1)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减;

当$x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增.

所以$h(x)_{\min}=h(1)=1$,$x-\ln x\geqslant1$,

因此$\dfrac{1}{2}x^2\left[x(x-\ln x)+\dfrac{1}{x}\right]\geqslant\dfrac{1}{2}x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}x^2\times2=x^2$,当且仅当$x=1$时,等号成立.

设$\varphi(x)=x^2-\ln x$,$x>0$,则$\varphi'(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$.

当$x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$单调递减;

当$x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$单调递增.

因此$\varphi(x)_{\min}=\varphi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\ln 2}{2}$,

从而$f(x)\geqslant\varphi(x)\geqslant\dfrac{1+\ln 2}{2}$,则$f(x)\geqslant\dfrac{1+\ln 2}{2}$,

因为$1\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以$f(x)\geqslant\dfrac{1+\ln 2}{2}$中的等号不成立,

故$f(x)>\dfrac{1+\ln 2}{2}$.