2022年秋季高三入学检测

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共10页.时量120分钟.满分150分.

得分:________

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

★1. 复数$\frac{-2i}{1+i}=$

A. $-1-i$　　B. $-1+i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

★2. 已知集合$A=\{x|x^2-2x-3<0\}$,$B=\{x|y=\lg(x-1)\}$,则$A\cap B=$

A. $(3,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(1,3)$

3. 已知边长为2的等边$\triangle ABC$,O为其中心,对①$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|=6$;②$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$;③$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=0$;④$3\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=2$这四个等式,正确的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 自5月初,麓山之巅观日出在抖音走红后,每天都有上千人披星戴月登顶岳麓山看日出,登顶游客中外地游客占$\frac{3}{5}$,外地游客中有$\frac{1}{3}$乘观光车登顶,本地游客中有$\frac{1}{6}$乘观光车登顶,乘观光车登顶的票价为20元.若某天有1200人登顶观日出,则观光车营运公司这天的登顶观日出项目的营运票价收入是

A. 4800元　　B. 5600元　　C. 6400元　　D. 7200元

★5. 已知函数 $f(x)=\cos^2\frac{\omega x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{5}{12}\right]$

B. $\left(0,\frac{5}{12}\right]\cup\left[\frac{5}{6},\frac{11}{12}\right)$

C. $\left(0,\frac{5}{6}\right]$

D. $\left(0,\frac{5}{12}\right]\cup\left[\frac{5}{6},\frac{11}{12}\right]$

6. 有一个圆台型的密闭盒子（表面不计厚薄），其母线与下底面成 60°角，且母线长恰好等于上下底半径之和，在圆台内放置一个球，当球体积最大时，设球的表面积为 S_1，圆台的侧面积为 S_2，则

A. $S_1>S_2$

B. $S_1<S_2$

C. $S_1=S_2$

D. 无法确定 S_1 与 S_2 的大小

7. 已知函数 $f(x)=\ln(|x-2|+1)-\frac{1}{x^2-4x+5}$，则 $f(-1)$、$f(e^2)$、$f(2^e)$ 的大小关系是

A. $f(-1)<f(2^e)<f(e^2)$

B. $f(-1)<f(e^2)<f(2^e)$

C. $f(e^2)<f(-1)<f(2^e)$

D. $f(2^e)<f(e^2)<f(-1)$

8. 在△ABC 中，$AB=5$，$AC=3$，$\tan A=\frac{4}{3}$，点 M、N 分别在边 AB、BC 上移动，且 $MN=BN$，沿 MN 将△BMN 折起来得到棱锥 $B-AMNC$，则该棱锥的体积的最大值是

A. $\frac{16\sqrt{2}}{15}$

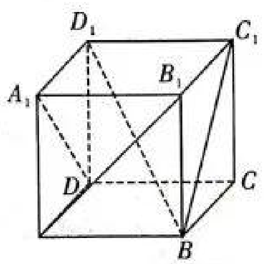
B. $\frac{16\sqrt{3}}{15}$

C. $\frac{16\sqrt{6}}{15}$

D. $\frac{309}{128}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

★9. 如图正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，以下结论正确的是



A. 异面直线 A_1D 与 AB_1 所成的角为 60°

B. 直线 A_1D 与 BC_1 垂直

C. 直线 A_1D 与 BD_1 平行

D. 三棱锥 $A-A_1CD$ 的体积为 $\frac{1}{6}a^3$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+2x-3\ln x(a\in\mathbf{R})$，下列说法正确的是

A. $a>-\frac{1}{3}$时 $f(x)$存在单调递增区间

B. $a>-\frac{1}{3}$时 $f(x)$存在两个极值点

C. $a\leqslant-\frac{1}{3}$是 $f(x)$为减函数的充要条件

D. $\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$无极大值

11. 已知 A,B 是抛物线 $C:y^2=4x$ 上两动点，F 为抛物线 C 的焦点，则

A. 直线 AB 过焦点 F 时，$|AB|$最小值为 4

B. 直线 AB 过焦点 F 且倾斜角为 $60°$时（点 A 在第一象限），$|AF|=2|BF|$

C. 若 AB 中点 M 的横坐标为 3，则$|AB|$最大值为 8

D. 点 A 坐标$(4,4)$，且直线 AF，AB 斜率之和为 0，AF 与抛物线的另一交点为 D，则直线 BD 方程为：$4x+8y+7=0$

12. 将 n^2 个数排成 n 行 n 列的一个数阵. 如图：该数阵第一列的 n 个数从上到下构成以 m 为公差的等差数列，每一行的 n 个数从左到右构成以 m 为公比的等比数列(其中 $m>0$). 已知 $a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$，记这 n^2 个数的和为 S. 下列结论正确的有

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\
\cdots\cdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{array}$$

A. $m=3$

B. $\sum\limits_{k=1}^{18}a_{kk}=\frac{103\times 3^{18}+5}{4}$

C. $a_{ij}=(3i-1)\times 3^{j}$

D. $S=\frac{1}{4}n(3n+1)(3^n-1)$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1			分
答案													

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是________(用数字作答).

★14. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $x^2+y^2-8x+15=0$，若直线 $y=kx-2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，则 k 的最大值是________.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，$\tan B=4\tan A$，则当 $B-A$ 取最大值时，$\sin C=$________.

16. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 作其中一条渐近线的垂线，垂足为 Q，直线 FQ 与双曲线的左、右两支分别交于点 M,N，若 $|MQ|=3|QN|$，则双曲线的离心率是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

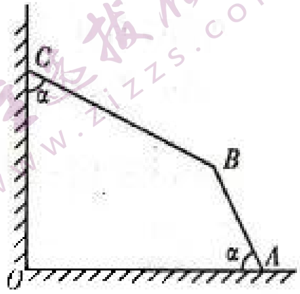
已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$. $M(1,1)$，$A_n(2,a_n)$，$B_n(3,2a_{n+1}-3)$ 为直角坐标平面上的点. 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，M、A_n、B_n 三点共线.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求证：$\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+2}}<\dfrac{3}{4}$.

18.（本小题满分 12 分）

某公园要建造如图所示的绿地 $OABC$，OA、OC 为互相垂直的墙体，已有材料可建成的围栏 AB 与 BC 的总长度为 12 米，且 $\angle BAO=\angle BCO$. 设 $\angle BAO=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

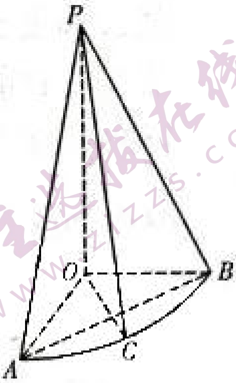


(1) 当 $AB=3$，$\alpha=\frac{5\pi}{12}$ 时，求 AC 的长；

(2) 1 当 $AB=6$ 时，求 $OABC$ 面积 S 的最大值及此时 α 的值.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在直角 $\triangle POA$ 中，$PO\perp OA$，$PO=2OA=4$，将 $\triangle POA$ 绕边 PO 旋转到 $\triangle POB$ 的位置，使 $\angle AOB=90°$，得到圆锥的一部分，点 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点，且 $\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$.



(1) 求点 O 到平面 PAB 的距离；

(2) 设直线 PC 与平面 PAB 所成的角为 φ，求 $\sin\varphi$ 的值.

20.(本小题满分 12 分)

某工厂为了提高生产效率,对生产设备进行了技术改造,为了对比技术改造后的效果,采集了技术改造前后各 20 次连续正常运行的时间长度(单位:天)数据,整理如下:

改造前:19,31,22,26,34,15,22,25,40,35,18,16,28,23,34,15,26,20,24,21;

改造后:32,29,41,18,26,33,42,34,37,39,33,22,42,35,43,27,41,37,38,36.

(1)完成下面的列联表,并依据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验分析判断技术改造前后的连续正常运行时间是否有差异?

技术改造	设备连续正常运行天数		合计
	超过 30	不超过 30	
改造前			
改造后			
合　计			

(2)工厂的生产设备的运行需要进行维护,工厂对生产设备的生产维护费用包括正常维护费和保障维护费两种. 对生产设备设定维护周期为 T 天(即从开工运行到第 kT 天,$k\in\mathbf{N}^*$)进行维护. 生产设备在一个生产周期内设置几个维护周期,每个维护周期相互独立. 在一个维护周期内,若生产设备能连续运行,则只产生一次正常维护费,而不会产生保障维护费;若生产设备不能连续运行,则除产生一次正常维护费外,还产生保障维护费. 经测算,正常维护费为 0.5 万元/次,保障维护费第一次为 0.2 万元/周期,此后每增加一次则保障维护费增加 0.2 万元.

现制定生产设备一个生产周期(以 120 天计)内的维护方案:$T=30$,$k=1,2,3,4$. 以生产设备在技术改造后一个维护周期内能连续正常运行的频率作为概率,求一个生产周期内生产维护费的分布列及均值.

附：

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$，(其中 $n=a+b+c+d$).

21.（本小题满分 12 分）

设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，MF_2 与 x 轴垂直．直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N，且直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(1)求椭圆 C 的离心率.

(2)设 $D(0,1)$ 是椭圆 C 的上顶点，过 D 任作两条互相垂直的直线分别交椭圆 C 于 A、B 两点，过点 D 作线段 AB 的垂线，垂足为 Q，判断在 y 轴上是否存在定点 R，使得 $|RQ|$ 的长度为定值？并证明你的结论.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

(1)判断函数 $f(x)$在区间$(0,3\pi)$上极值点的个数并证明;

(2)函数 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的极值点从小到大分别为 x_1,x_2,$x_3,\cdots,x_n,\cdots$,设 $a_n=f(x_n)$,S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

①证明:$a_1+a_2<0$;

②问是否存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 使得 $S_n\geq 0$? 若存在,求出 n 的取值范围;若不存在,请说明理由.

2022年秋季高三入学检测

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	C	D	B	A	C	ABD	AC	ACD	ABD

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A　【解析】复数 $\frac{-2i}{1+i}=\frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-i(1-i)=-1-i$.

2. D　【解析】易知 $A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cap B=\{x|1<x<3\}$，故选 D.

4. C　【解析】从登顶观日出的人中任选一人，他是乘观光车登顶的概率 $=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{15}$，则观光车营运公司这天的登顶观日出项目的营运票价收入是 $1200\times\frac{4}{15}\times20=6400$(元).

5. D　【解析】函数 $f(x)=\cos^2\frac{\omega x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi$，$0<\omega\leqslant2$，$f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，可得：

$$\begin{cases}\omega\pi+\frac{\pi}{6}\geqslant0,\\2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi\end{cases}\text{或}\begin{cases}\omega\pi+\frac{\pi}{6}\geqslant\pi,\\2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant2\pi,\end{cases}$$

解得 $\omega\in\left(0,\frac{5}{12}\right]\cup\left[\frac{5}{6},\frac{11}{12}\right]$，故选 D.

6. B　【解析】设圆台上下底的半径分别为 a、b，由其母线与下底面成 60° 角，且母线长恰好等于上下底半径之和，则 $b=3a$，且满足条件的圆台正好有一个与其上下底面及侧面都相切的内切球，此球体积最大且半径是 $\sqrt{3}a$，表面积 $S_1=12\pi a^2$，圆台上下底的半径分别为 a、$3a$，母线长为 $4a$，侧面积 $S_2=\pi(a+3a)\cdot4a=16\pi a^2$，则 S_1 S_2.

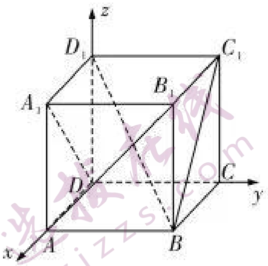
7. A　【解析】函数 $f(x)$ 的图像可看成由 $g(x)=\ln(|x|+1)-\frac{1}{x^2+1}$ 向右平移2个单位得到，而 $g(x)$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 的图像关于 $x=2$ 对称，且在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $f(-1)=f(5)$，而 $5<2^e<e^2$，则 $f(-1)<f(2^e)<f(e^2)$.
以下说明 $2^e<e^2\Leftrightarrow e\ln2<2\ln e\Leftrightarrow\frac{\ln2}{2}<\frac{\ln e}{e}$，
考查函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，易证 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，故 $2^e<e^2$.

8. C　【解析】由 $\tan A=\frac{4}{3}$ 得 $\cos A=\frac{3}{5}$，由余弦定理得 $CB=4$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，C 为直角，对 MN 的任何位置，易证当面 $MNB\perp$ 面 $AMNC$ 时，此时的点 B 到底面 $AMNC$ 的距离最大(略)，此时 $\angle NMB$ 即为 MB 与底面 $AMNC$ 所成的角，设 $BM=2x$，在 $\triangle MNB$ 中，$\tan B=\frac{3}{4}$，$S_{\triangle MNB}=\frac{1}{2}\cdot2x\cdot x\cdot\tan B=\frac{3}{4}x^2$，$\sin\angle NMB=\sin B=\frac{3}{5}$，点 B 到底面 $AMNC$ 的距离 $h=MB\sin\angle NMB=\frac{6x}{5}$，则 $V_{B-AMNC}=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle MNB})h=\frac{1}{3}\left(6-\frac{3}{4}x^2\right)\cdot\frac{6x}{5}=\frac{24x-3x^3}{10}$，$0<x\leqslant\frac{5}{2}$，$V'_{B-AMNC}=\frac{-9x^2+24}{10}=-\frac{9}{10}\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，在 $\left(0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 上↗，在 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{5}{2}\right]$ 上↘，故当 $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时，四棱锥 $B-AMNC$ 的体积最大，是 $\frac{16\sqrt{6}}{15}$.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.

9. ABD　【解析】如图所示，以 D 为原点，DA、DC、DD_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.
选项 A，$A_1(a,0,a)$，$D(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B_1(a,a,a)$，
$\therefore\overrightarrow{A_1D}=(-a,0,-a)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,a,a)$，

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{A_1D}||\overrightarrow{AB_1}|}=\dfrac{-a^2}{\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a}=-\dfrac{1}{2}$,



∴异面直线 A_1D 与 AB_1 所成的角为 60°，故选项 A 正确；

选项 B，$C_1(0,a,a)$，$B(a,a,0)$，$\therefore\overrightarrow{BC_1}=(-a,0,a)$，

$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(-a,0,-a)\cdot(-a,0,a)=a^2-a^2=0$，

∴直线 A_1D 与 BC_1 垂直，故选项 B 正确；

选项 C，$D_1(0,0,a)$，$\therefore\overrightarrow{BD_1}=(-a,-a,a)$，

$\because\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(-a,0,-a)\cdot(-a,-a,a)=a^2-a^2=0$，∴直线 A_1D 与 BD_1 垂直，不平行，故选项 C 错误；

选项 D，三棱锥 $A-A_1CD$ 的体积 $=V_{C-A_1AD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}a^2\cdot a=\dfrac{1}{6}a^3$，故选项 D 正确。

故选 ABD. 来源微信公众号：高三答案

10. AC 【解析】$f'(x)=\dfrac{ax^2+2x-3}{x}$，$f(x)$ 存在单调递增区间，即 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 有解，即：$a>\dfrac{3-2x}{x^2}=3\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 有解，$y=3\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 最小值为 $-\dfrac{1}{3}$，故 $a>-\dfrac{1}{3}$，A 正确；$a>-\dfrac{1}{3}$ 时，函数 $y=ax^2+2x-3$ 的判别式 $\Delta=12a+4>0$，存在两个零点，但 $x_1x_2=-\dfrac{3}{a}$，故在 $a>0$ 时，两零点异号，即 $f'(x)=\dfrac{ax^2+2x-3}{x}$ 只有一个零点，B 错误；

$f(x)$ 为减函数，即 $f'(x)=\dfrac{ax^2+2x-3}{x}\leqslant 0$ 恒成立，则 $a<0$ 且 $\Delta=12a+4\leqslant 0$，故 $a\leqslant-\dfrac{1}{3}$，C 正确；当 $-\dfrac{1}{3}<a<0$ 时，$f'(x)=\dfrac{ax^2+2x-3}{x}$ 存在两个零点，此时 $f(x)$ 存在极大值，D 错误。

11. ACD 【解析】直线 AB 过焦点 F，当 AB 垂直于 x 轴时，|AB| 取最小值 4，A 正确；对于 B 选项，由题可知：$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos 60^\circ}=4$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos 60^\circ}=\dfrac{4}{3}$，故 B 错误；由于 A，B 为动点，所以 $|AB|=|AF|+|BF|=x_A+x_B+2=8$，当且仅当直线 AB 过焦点 F 时等号成立，故 C 正确；对于 D 选项，依题意，$k_{AD}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{y_A-y_D}{x_A-x_D}=\dfrac{4}{y_A+y_D}$，故 $y_D=-1$，即 $D\left(\dfrac{1}{4},-1\right)$，同理可得 $B\left(\dfrac{49}{4},-7\right)$，故直线 BD 方程为 $4x+8y+7=0$，D 正确。

12. ABD 【解析】$\because a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$，

$\therefore 2m^2=2+(6-1)m+1$，解得 $m=3$ 或 $-\dfrac{1}{2}$（舍负），即选项 A 正确；

$\therefore a_{ij}=a_{i1}\cdot 3^{j-1}=[2+(i-1)\cdot 3]\cdot 3^{j-1}=(3i-1)\cdot 3^{j-1}$，即选项 C 错误；

令 $T=\sum\limits_{k=1}^{k}a_{kk}$，则 $T=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{kk}=2\cdot 3^0+5\cdot 3^1+8\cdot 3^2+\cdots+(3k-1)\cdot 3^{k-1}$ ①，

$3T=2\cdot 3^1+5\cdot 3^2+8\cdot 3^3+\cdots+(3k-4)\cdot 3^{k-1}+(3k-1)\cdot 3^k$ ②，

①－②得，$-2T=2+3\cdot 3^1+3\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+3\cdot 3^{k-1}-(3k-1)\cdot 3^k$

$=2+3\times\dfrac{3(1-3^{k-1})}{1-3}-(3k-1)\cdot 3^k$

$=\left(\dfrac{5}{2}-3k\right)\cdot 3^k-\dfrac{5}{2}$，

$\therefore T=\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3k}{2}\right)\cdot 3^k$，

当 $k=18$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{18}a_{kk}=\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3\times 18}{2}\right)\cdot 3^{18}=\dfrac{103\times 3^{18}+5}{4}$，即选项

$S=(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})$

$=\dfrac{a_{11}(1-3^n)}{1-3}+\dfrac{a_{21}(1-3^n)}{1-3}+\cdots+\dfrac{a_{n1}(1-3^n)}{1-3}$

$=\dfrac{1}{2}(3^n-1)\cdot(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1})$

$=\dfrac{1}{2}(3^n-1)\cdot\left(2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 3\right)$

$=\frac{1}{4}n(3n+1)(3^n-1)$，即选项 D 正确.

故答案选：ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 240 【解析】设展开式通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$，整理得 $C_6^r x^{12-3r}\cdot 2^r$，

因为是常数项，所以 $12-3r=0$，所以 $r=4$，

故常数项是 $C_6^4\cdot 2^4=15\times 16=240$，

故答案为：240.

14. $\frac{4}{3}$ 【解析】圆 C 的标准方程为 $(x-4)^2+y^2=1$，圆心为 $(4,0)$.

由题意知，$(4,0)$ 到 $kx-y-2=0$ 的距离应不大于 2，

即 $\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 2$. 整理得 $3k^2-4k\leqslant 0$，解得 $0\leqslant k\leqslant\frac{4}{3}$.

故 k 的最大值是 $\frac{4}{3}$.

15. 1 【解析】由在 $\triangle ABC$ 中 $\tan B=4\tan A$ 知 $\tan A>0$，且 $0<B-A<\frac{\pi}{2}$，

$\tan(B-A)=\frac{\tan B-\tan A}{1+\tan B\cdot\tan A}=\frac{3\tan A}{1+4\tan^2 A}=\frac{3}{4\tan A+\frac{1}{\tan A}}\leqslant\frac{3}{4}$，

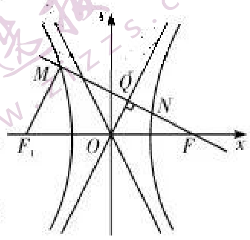
当且仅当 $4\tan A=\frac{1}{\tan A}$，即 $\tan A=\frac{1}{2}$ 时取等号.

∵ $y=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，则此时 $B-A$ 取最大值，且 $\tan B=2$.

此时 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin(A+B)=1$.

∴ $\sin C=1$.

16. $\sqrt{5}$ 【解析】如图，



根据点到直线的距离公式可得点 F 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 b.

设双曲线的左焦点为 F_1，连接 MF_1，则 $|MF_1|=|FM|-2a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OQF$ 中，设 $\angle QFO=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{b}{c}$. 在 $\triangle F_1MF$ 中，由余弦定理得 $|MF_1|^2=|FM|^2+|FF_1|^2-2|FM|\cdot|FF_1|\cos\theta$，将 $|MF_1|=|FM|-2a$ 代入整理后得 $|FM|=\frac{b^2}{c\cos\theta-a}=\frac{b^2}{b-a}$，同理

$|FN|=\frac{b^2}{c\cos\theta+a}=\frac{b^2}{b+a}$. 因为 $\frac{|MQ|}{|QN|}=\frac{|FM|-|QF|}{|QF|-|FN|}=\frac{\frac{b^2}{b-a}-b}{b-\frac{b^2}{b+a}}=\frac{b+a}{b-a}=3$，所以 $a=\frac{1}{2}b$，故离心率为 $\sqrt{5}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 由题意得：$\overrightarrow{MA_n}=(1,a_n-1)$，$\overrightarrow{MB_n}=(2,2a_{n+1}-4)$，

∵ M、A_n、B_n 三点共线，则 $\overrightarrow{MA_n}\,/\!/\,\overrightarrow{MB_n}$，可得 $2a_n-2=2a_{n+1}-4$，即 $a_{n+1}-a_n=1$.

∴ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 公差为 1 的等差数列，所以 $a_n=n$. ………… 5 分

(2) ∵ $\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

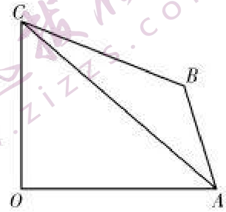
所以 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}<\frac{3}{4}$. ………… 10 分

18.【解析】(1)在$\triangle ABC$中,$AB=3,BC=9,\angle ABC=2\pi-\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=117$,故$AC=3\sqrt{13}$.

因此AC的长为$3\sqrt{13}$米. …………………………………………………… 4分



(2)由题意,$AB=BC=6,\angle ACB=\angle CAB,\angle ABC=2\pi-2\alpha-\frac{\pi}{2}$,所以$\angle OAC=\angle OCA=\frac{\pi}{4}$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$AC^2=72+72\sin 2\alpha$. …………………… 6分

所以$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{4}AC^2=18+18\sin 2\alpha$. …………………………… 8分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=-18\cos 2\alpha$.

于是$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AOC}=-18\cos 2\alpha+18+18\sin 2\alpha=18\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+18,0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

…………………………………………………………………………………… 10分

当$2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即$\alpha=\frac{3\pi}{8}$时,$S$取到最大值,最大值为$18\sqrt{2}+18$.

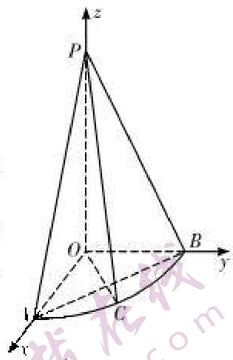
因此,当$\alpha=\frac{3\pi}{8}$时,养殖场$OABC$最大的面积为$18\sqrt{2}+18$平方米. ………………… 12分

19.【解析】(1)证明:由题意知:$PO\perp OA,PO\perp OB,OA\cap OB=O$,

$\therefore PO\perp$平面AOB.

又$PO=2OA=4$,所以$PA=PB=2\sqrt{5}$,$AB=2\sqrt{2}$,$S_{\triangle PAB}=6$.

设点O到平面PAB的距离为d,由$V_{O-PAB}=V_{P-AOB}$求得$d=$[illegible]. ………………………… 5分



(2)以O为原点,$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$的方向分别作为$x,y,z$轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,则$A(2,0,0),B(0,2,0),P(0,0,4)$. …………………………………………………… 7分

由题意知$\angle AOC=\frac{\pi}{6}$,则$C(\sqrt{3},1,0)$,

所以$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0),\overrightarrow{AP}=(-2,0,4),\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},1,-4)$.

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-2a+2b=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2a+4c=0,\end{cases}$取$c=1$,则$a=b=2$,

可得平面PAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(2,2,1)$. ………………………………………… 10分

所以$\sin\varphi=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{|2\sqrt{3}-2|}{6\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{15}$. ………………………… 12分

20.【解析】(1)列联表为:

技术改造	设备连续正常运行天数		合计
	超过30	不超过30	
改造前	5	15	20
改造后	15		
合　计	20	20	40

…………………………………………………………………………………… (2分)

零假设为:H_0:技术改造前后的连续正常运行时间无差异.

$\therefore\chi^2=\frac{40(5\times 5-15\times 15)^2}{20\times 20\times 20\times 20}=10>6.635$, …………………………… (4分)

∴依据小概率值$\alpha=0.010$的独立性检验分析判断H_0不成立,即技术改造前后的连续正常运行时间[illegible]差异. …… ([illegible]分)

(2)由题知，生产周期内有4个维护周期，一个维护周期为30天，一个维护周期内，生产线需保障维护的概率为 $P=\frac{1}{4}$.

设一个生产周期内需保障维护的次数为 ξ，则 $\xi\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$；一个生产周期内的正常维护费为 $0.5\times4=2$ 万元，保障维护费为 $\frac{0.2\xi\times(\xi+1)}{2}=(0.1\xi^2+0.1\xi)$ 万元.

∴一个生产周期内需保障维护 ξ 次时的生产维护费为 $(0.1\xi^2+0.1\xi+2)$ 万元.

设一个生产周期内的生产维护费为 X，则 X 的所有可能取值为 2，2.2，2.6，3.2，4. ……………………（7分）

$P(X=2)=\left(1-\frac{1}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$，

$P(X=2.2)=C_4^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{4}=\frac{27}{64}$，

$P(X=2.6)=C_4^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$，

$P(X=3.2)=C_4^3\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{64}$，

$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$. ……………………………………（10分）

所以，X 的分布列为

X	2	2.2	2.6	3.2	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

∴$E(X)=2\times\frac{81}{256}+2.2\times\frac{27}{64}+2.6\times\frac{27}{128}+3.2\times\frac{3}{64}+4\times\frac{1}{256}$ ……………………（11分）

$=\frac{162+237.6+140.4+38.4+4}{256}=\frac{582.4}{256}=2.275$.

∴一个生产周期内生产维护费的均值为2.275万元. ……………………（12分）

21.【解析】(1)由题意知，点 M 在第一象限. ∵M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，

∴M 的横坐标为 c. 当 $x=c$ 时，$y=\frac{b^2}{a}$，即 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$. ……………………（2分）

又直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\tan\angle MF_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

即 $b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}ac=a^2-c^2$，即 $c^2+\frac{\sqrt{2}}{2}ac-a^2=0$， ……………………（4分）

则 $e^2+\frac{\sqrt{2}}{2}e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $e=-\sqrt{2}$（舍去），

即 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………（5分）

(2)已知 $D(0,1)$ 是椭圆的上顶点，则 $b=1$，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，……………………（6分）

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 可得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2(m^2-1)=0(*)$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2(m^2-1)}{1+2k^2}$，

又 $\overrightarrow{DA}=(x_1,y_1-1)$，$\overrightarrow{DB}=(x_2,y_2-1)$， ……………………（8分）

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)$

$=(k^2+1)x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2$

$=(k^2+1)\cdot\dfrac{2(m^2-1)}{1+2k^2}+k(m-1)\cdot\dfrac{-4km}{1+2k^2}+(m-1)^2=\dfrac{2(m^2-1)(k^2+1)-4k^2(m^2-m)+(1+2k^2)(m-1)^2}{1+2k^2}=0$,

化简整理有 $3m^2-2m-1=0$,得 $m=-\dfrac{1}{3}$ 或 $m=1$.

当 $m=1$ 时,直线 AB 经过点 D,不满足题意; ······ (10 分)

当 $m=-\dfrac{1}{3}$ 时满足方程(*)中 $\Delta>0$,故直线 AB 经过 y 轴上定点 $G\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$.

又 Q 为过点 D 作线段 AB 的垂线的垂足,故 Q 在以 DG 为直径的圆上,取 DG 的中点为 $R\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$,则 $|RQ|$ 为定值,且 $|RQ|=$ $\dfrac{1}{2}|DG|=\dfrac{2}{3}$. ······ (12 分)

22.【解析】(1) $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,设 $g(x)=x\cos x-\sin x$,

又 $g'(x)=-x\sin x$, ······ (1 分)

当 $x\in(0,\pi]$ 时,∵ $\sin x>0$, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减, $g(x)<g(0)=0$,

∴ $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点; ······ (2 分)

当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时,∵ $\sin x<0$, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 上单调递增,

$g(\pi)=-\pi<0$, $g(2\pi)=2\pi>0$,

∴ $g(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 上有唯一零点; ······ (3 分)

当 $x\in(2\pi,3\pi]$ 时,∵ $\sin x>0$, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(2\pi,3\pi)$ 上单调递减,

∵ $g(2\pi)>0$, $g(3\pi)<0$,

∴ $g(x)$ 在 $(2\pi,3\pi)$ 上有唯一零点. ······ (4 分)

综上,函数 $g(x)$ 在区间 $(0,3\pi)$ 上有两个零点且在零点左右函数符号发生改变,

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,3\pi)$ 内恰有两个极值点. ······ (5 分)

(2)①由(1)知 $f(x)$ 在 $x\in(0,\pi]$ 无极值点;在 $x\in(\pi,2\pi]$ 有极小值点,即为 x_1;在 $x\in(2\pi,3\pi]$ 有极大值点,即为 x_2,

同理可得,在 $(3\pi,4\pi]$ 有极小值点 x_3,在 $(n\pi,(n+1)\pi]$ 有极值点 x_n.

由 $x_n\cos x_n-\sin x_n=0$ 得 $x_n=\tan x_n$, ······ (6 分)

∵ $x_2>x_1$,∴ $\tan x_2>\tan x_1=\tan(x_1+\pi)$,∵ $g(\pi)<0$, $g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1$, $g(2\pi)>0$, $g\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)<0$.

∴ $x_1\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $x_2\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$,∵ x_2, $x_1+\pi\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$,

由函数 $y=\tan x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递增得 $x_2>x_1+\pi$,

∴ $a_1+a_2=f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{\sin x_1}{x_1}+\dfrac{\sin x_2}{x_2}=\cos x_1+\cos x_2$,

由 $y=\cos x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递减得 $\cos x_2<\cos(x_1+\pi)=-\cos x_1$,

∴ $a_1+a_2=f(x_1)+f(x_2)<0$. ······ (8 分)

②同理 $x_{2n-1}\in\left((2n-1)\pi,2n-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x_{2n}\in\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>x_{2n}>x_{2n-1}+\pi>2n\pi$,

由 $y=\cos x$ 在 $\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{N})$ 上单调递减得 $\cos x_{2n}<-\cos$

∴ $a_{2n}+a_{2n-1}=f(x_{2n})+f(x_{2n-1})=\cos x_{2n}+\cos x_{2n-1}<0$,且 $a_{2n}=f(x_{2n})>0$, $a_{2n-1}=f(x_{2n-1})<0$,

当 n 为偶数时,从 $a_1=f(x_1)$ 开始相邻两项配对,每组和均为负值,

即 $S_n=[f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_3)+f(x_4)]+\cdots+[f(x_{n-1})+f(x_n)]<0$,结论成立; ······ (10 分)

当 n 为奇数时,从 $a_1=f(x_1)$ 开始相邻两项配对,每组和均为负值,还多出最后一项也是负值,

即 $S_n=[f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_3)+f(x_4)]+\cdots+[f(x_{n-2})+f(x_{n-1})]+f(x_n)<0$,结论也成立,

综上,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n<0$ 成立,故不存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 使得 $S_n\geq0$. ······ (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。