炎德·英才大联考雅礼中学2022届高三入学考试

数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	D	D	B	A	B	B	A	AC	BC	BCD	ABD

7. B 【解析】由题意可知三年修完四门课程，则每位同学每年所修课程数为1，1，2或0，1，3或0，2，2，若是1，1，2，则先将4门学科分成三组，共$\frac{C_4^1C_3^1C_2^2}{A_2^2}$种不同方式. 再分配到三个学年共有$A_3^3$种不同分配方式，由乘法原理可得共有$\frac{C_4^1C_3^1C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=36$种，若是0，1，3，则先将4门学科分成三组共$C_4^1C_3^3$种不同方式，再分配到三个学年共有$A_3^3$种不同分配方式，由乘法原理可得共有$C_4^1C_3^3\cdot A_3^3=24$种，若是0，2，2，则先将4门学科分成三组共$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$种不同方式，再分配到三个学年共有$A_3^3$种不同分配方式，由乘法原理可得共有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=18$种，所以每位同学的不同选修方式有$36+24+18=78$种，故选B.

8. A 【解析】由$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n(n+1)}$，

通过累加法可得：$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=-1+2-\frac{2}{n}=1-\frac{2}{n}$，

所以$a_n=n-2$，所以$a_{22}=20$，

$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，满足$f(2-x)=f(x)$，

所以$f(x)=-f(x-2)=f(x-4)$，

所以周期$T=4$，

由$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f(0)=0$，

$f(a_{22})=f(20)=f(0)=0$，

故选A.

9. AC 【解析】因为$|\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，所以$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})^2=|\boldsymbol{b}|^2+4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$，又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，A正确；

因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，B不正确；

因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，C正确；

因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90^\circ$，D不正确.

故选AC.

10. BC 【解析】对于A选项，由已知条件可得$\overline{x}=\frac{9}{10}$，$\overline{y}=\frac{3}{10}$，所以，回归直线过样本中心点$\left(\frac{9}{10},\frac{3}{10}\right)$，

将其代入线性回归方程 $\hat{y}=-2\hat{b}x+1$ 中，得 $-\frac{9}{5}\hat{b}+1=\frac{3}{10}$，解得 $\hat{b}=\frac{7}{18}$，故 A 错误；

对于 B，若任取 2 个数，使得这 2 个数的和为奇数，则这 2 个数中一个为奇数，一个为偶数，

即所求的概率为 $P=\frac{C_4^1C_4^1}{C_8^2}=\frac{4}{7}$，故 B 正确；

对于 C，设离散型随机变量 X 的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则随机变量 $2X+30$ 的取值为 $2x_1+30$，$2x_2+30,\cdots,2x_n+30$，

由已知条件可得 $D(X)=4$，则 $D(2X+30)=4D(X)=16$，

所以，数据 $2x_1+30,2x_2+30,\cdots,2x_n+30$ 的标准差是 4，故 C 正确；

对于 D，由随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$ 知 $\mu=1$，

由正态分布密度曲线的轴对称性可知 $P(X>3)=P(X<-1)=0.3$，则 $P(X\leqslant 3)=0.7$，所以，$P(X<2)<P(X\leqslant 3)=0.7$，故 D 错误. 故选 BC.

11. BCD 【解析】对于 A，直线 $(3+m)x+4y-3+3m=0(m\in\mathbf{R})$ 得 $m(x+3)+3x+4y-3=0$，

由 $\begin{cases}x+3=0,\\3x+4y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3,\\y=3,\end{cases}$ 即直线恒过定点 $(-3,3)$，故 A 错误；

对于 B，圆心 $C(0,0)$ 到直线 $l:x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离 $d=1$，圆的半径 $r=2$，故圆 C 上有 3 个点到直线 l 的距离为 1，故 B 正确；

对于 C，曲线 $C_1:x^2+y^2+2x=0$，即 $(x+1)^2+y^2=1$，

曲线 $C_2:x^2+y^2-4x-8y+m=0$，即 $(x-2)^2+(y-4)^2=20-m$，

两圆心的距离为 $\sqrt{(-1-2)^2+(0-4)^2}=5=1+\sqrt{20-m}$，解得 $m=4$，故 C 正确；

对于 D，因为点 P 为直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 上一动点，设点 $P(4-2t,t)$，

圆 $C:x^2+y^2=4$ 的圆心为 $C(0,0)$，

以线段 PC 为直径的圆 Q 的方程为 $(x-4+2t)x+(y-t)y=0$，

即 $x^2+(2t-4)x+y^2-ty=0$，

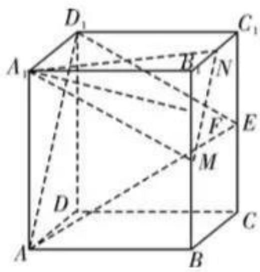
故圆 Q 与圆 C 的公共弦方程为：$x^2+(2t-4)x+y^2-ty-(x^2+y^2)=0-4$，

即 $(2t-4)x-ty+4=0$，此直线即为直线 AB，经验证点 $(1,2)$ 在直线 $(2t-4)x-ty+4=0$ 上，

即直线 AB 经过定点 $(1,2)$，故 D 正确.

故选：BCD.

12. ABD 【解析】如图，设线段 BB_1，B_1C_1 中点为 M，N，连接 A_1M，MN，A_1N，



因为正方体 AC_1，易得 $MN/\!/AD_1$，

$MN\not\subset$ 面 D_1AE，$AD_1\subset$ 面 D_1AE，所以 $MN/\!/$ 面 D_1AE，

$A_1M/\!/D_1E$，$D_1E\subset$ 面 D_1AE，所以 $A_1M/\!/$ 面 D_1AE，

又 $MN\cap A_1M=M$，

所以平面 $A_1MN/\!/$ 平面 D_1AE，

因为 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直，又 $A_1F\not\subset$ 平面 D_1AE，

所以直线 A_1F 与平面 D_1AE 平行，

所以 $A_1F\subset$ 面 A_1MN，

又点 F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且面 $A_1MN\cap$ 面 $BCC_1B_1=MN$，

所以点 F 的轨迹为线段 MN，故选项 A 正确；

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

由图可知，A_1F 与 BE 是异面直线，故选项 B 正确；

当点 F 与点 M 重合时，直线 A_1F 与直线 D_1E 平行，故选项 C 错误；

因为 $MN\parallel AD_1$，$MN\not\subset$ 面 ABD_1，$AD_1\subset$ 面 ABD_1，

所以 $MN\parallel$ 面 ABD_1，则点 F 到平面 ABD_1 的距离是定值，

又三角形 ABD_1 的面积是定值，所以三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值，故选项 D 正确.

故选：ABD.

三、填空题

13. 4 【解析】根据题意，函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x\leqslant 1,\\ \log_{\frac{1}{2}}x, x>1,\end{cases}$

当 $x_0\leqslant 1$ 时，$f(x_0)=(x_0-1)^2=-2$，无解；

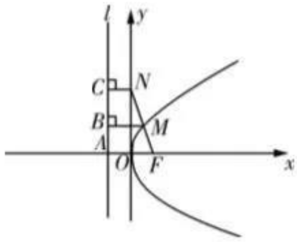
当 $x_0>1$ 时，$f(x_0)=\log_{\frac{1}{2}}x_0=-2$，解可得 $x_0=4$，符合题意，

故 $x_0=4$，

故答案为：4.

14. $\sqrt{2}$

15. 6 【解析】$y^2=8x$，则 $p=4$，焦点为 $F(2,0)$，准线 $l: x=-2$，如图，M 为 F、N 中点，知线段 BM 为梯形 $AFNC$ 的中位线，$\because CN=2$，$AF=4$，$\therefore MB=3$，又由定义知 $MB=MF$，且 $|MN|=|NF|$，$\therefore |FN|=6$.



16. (i)$(1,2)$ (ii)$(3,402)$

【解析】$x_6=(x_6-x_5)+(x_5-x_4)+\cdots+(x_2-x_1)+x_1$

$=6-5\left[T(1)-T\left(\frac{4}{5}\right)+T\left(\frac{4}{5}\right)-T\left(\frac{3}{5}\right)+\cdots+T\left(\frac{1}{5}\right)-T(0)\right]=1$，

$y_6=(y_6-y_5)+(y_5-y_4)+\cdots+(y_2-y_1)+y_1$

$=1+T(1)-T\left(\frac{4}{5}\right)+T\left(\frac{4}{5}\right)-T\left(\frac{3}{5}\right)+\cdots+T\left(\frac{1}{5}\right)-T(0)$

$=2$，

故第 6 棵树种植点的坐标应为 $(1,2)$.

$x_{2008}=(x_{2008}-x_{2007})+(x_{2007}-x_{2006})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1$

$=2008-5\left[T\left(\frac{2007}{5}\right)-T\left(\frac{2006}{5}\right)+T\left(\frac{2006}{5}\right)-T\left(\frac{2005}{5}\right)+\cdots+T\left(\frac{1}{5}\right)-T(0)\right]=3$，

$y_{2008}=(y_{2008}-y_{2007})+(y_{2007}-y_{2006})+\cdots+(y_2-y_1)+y_1$

$=1+T\left(\frac{2007}{5}\right)-T\left(\frac{2006}{5}\right)+T\left(\frac{2006}{5}\right)-T\left(\frac{2005}{5}\right)+\cdots+T\left(\frac{1}{5}\right)-T(0)=402$，

故第 2008 棵树种植点的坐标应为 $(3,402)$.

四、解答题

17.【解析】(1)$a_1=\frac{1}{2}a_{\frac{1+1}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}\Rightarrow a_1=1$，$a_2=2a_{\frac{2}{2}}+\frac{2}{2}=2a_1+1=3$，$a_3=\frac{3}{2}a_{\frac{3+1}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}a_2+\frac{1}{2}=5$，$a_4=2a_{\frac{4}{2}}+\frac{4}{2}=2a_2+2=8$. ………………………………………………… 3 分

因为 $a_3-a_2=2$，$a_4-a_3=3$，$a_3-a_2\neq a_4-a_3$，所以数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

又因为 $\frac{a_2}{a_1}=3$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{5}{3}$，$\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{a_3}{a_2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 也不是等比数列. ……………………………… 5 分

(2)因为对任意正整数 n，$a_{2^{n+1}}=2a_{2^n}+2^n$，$\frac{a_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}-\frac{a_{2^n}}{2^n}=\frac{1}{2}$，$\frac{a_2}{2}=\frac{3}{2}$，

所以数列$\left\{\frac{a_{2^n}}{2^n}\right\}$是首项为$\frac{3}{2}$，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，…………………………………… 7 分

从而对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{a_{2^n}}{2^n}=\frac{3}{2}+\frac{n-1}{2}$，$a_{2^n}=(n+2)2^{n-1}$.

所以数列$\{a_{2^n}\}$的通项公式是$a_{2^n}=(n+2)2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$. …………………………… 10 分

18.【解析】(1)由正弦定理得：$\sin A+\sin C=2\sin B\cos A$

$\Rightarrow\sin A+\sin(A+B)=2\cos A\sin B$

$\Rightarrow\sin A+\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\cos A\sin B$

$\Rightarrow\sin A=\cos A\sin B-\sin A\cos B$

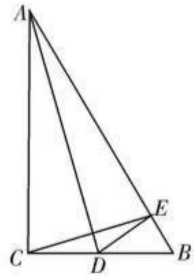
$\Rightarrow\sin A=\sin(B-A)$，…………………………………………………………………… 3 分

$\because A,B\in(0,\pi)$，

$\therefore A=B-A$，

$\therefore B=2A$. ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CA}\Rightarrow\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，



$\therefore DE\perp AB$.

$\because\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}=2\cos A$，

$\therefore\cos A=\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore BE=DB\cos B=\frac{1}{4}a$. …………………………………………………………………… 8 分

而四边形$ACDE$的面积$S=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}b\times\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{7a}{4}\times\frac{\sqrt{3}a}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{32}a^2$，

$\therefore\frac{15\sqrt{3}}{32}a^2=\frac{15\sqrt{3}}{8}\Rightarrow a=2$. ……………………………………………………… 10 分

由余弦定理得：$CE=\sqrt{BC^2+BE^2-2BC\cdot BE\cos 60^\circ}=\sqrt{4+\frac{1}{4}-2\times2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$. ……

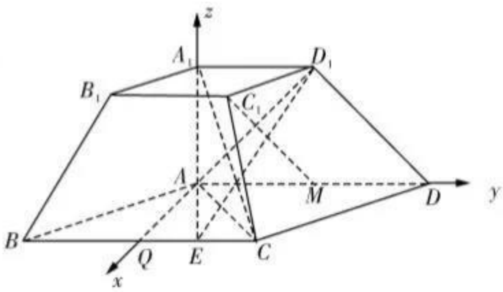
……………………………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)取BC中点Q，连接AQ,A_1C,AC，

因为四边形$ABCD$为菱形，则$AB=BC$，$\because\angle ABC=60^\circ$，$\therefore\triangle ABC$为等边三角形，

$\because Q$为BC的中点，则$AQ\perp BC$，$\because AD//BC$，$\therefore AQ\perp AD$，

由于$AA_1\perp$平面$ABCD$，以点A为坐标原点，以AQ，AD，AA_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系，如图. ………………………………………… 2 分



则$A(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$D_1(0,1,1)$，$Q(\sqrt{3},0,0)$，

$C(\sqrt{3},1,0)$，$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$M(0,1,0)$，

$\overrightarrow{C_1M}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{A_1C}=(\sqrt{3},1,-1)$，…… 4 分

$\therefore \overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+(-1)^2=0$，$\therefore C_1M\perp A_1C$；…………………………………… 6 分

(2)假设点 E 存在，设点 E 的坐标为 $(\sqrt{3},\lambda,0)$，其中 $-1\leqslant\lambda\leqslant1$，$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},\lambda,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$，…………………………………………………………………………………… 8 分

设平面 AD_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+\lambda y=0,\\ y+z=0,\end{cases}$

取 $y=-\sqrt{3}$，则 $x=\lambda$，$z=\sqrt{3}$，所以，$\boldsymbol{n}=(\lambda,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，

平面 ADD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

所以，$|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+6}}=\frac{1}{3}$，解得 $\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………………………… 10 分

又由于二面角 $E-AD_1-D$ 为锐角，由图可知，点 E 在线段 QC 上，

所以 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $CE=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，棱 BC 上存在一点 E，使得二面角 $E-AD_1-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，此时 $CE=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………
…………………………………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)电动机工作时间不少于 4 个月共有三种情况：

①装入两件甲品牌，概率为 $\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$；

②装入一件甲品牌，一件乙品牌，且乙品牌的使用寿命为 4 个月，概率为 $\frac{C_4^1\times C_2^1}{C_6^2}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$；

③装入两件乙品牌，且两件的使用寿命均为 4 个月，概率为 $\frac{C_2^2}{C_6^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{60}$.

$\therefore$ 电动机可工作时间不少于 4 个月的概率为 $P=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}+\frac{1}{60}=\frac{41}{60}$； ………………………… 6 分

(2)若采用方案一，设电动机可工作时间为 X(单位：月)，则 X 的可能取值为 7，8，

$P(X=8)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(X=7)=1-P(X=8)=\frac{3}{4}$，

所以，X 的分布列为

X	7	8
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore E(X)=7\times\frac{3}{4}+8\times\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$，它与购置轴承的成本之比为 $\frac{E(X)}{1000+1000}=\frac{29}{8000}$.

若采用方案二，设两件乙品牌轴承的使用寿命之和为 Y(单位：月)，则 Y 的可能取值为 6，7，8，

$P(Y=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(Y=7)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P(Y=8)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

设甲品牌轴承的使用寿命为 M(单位：月)，此时电动机可工作时间为 Z(单位：月)，则 Z 的可能取值为 6，7，8，

$P(Z=6)=P(Y=6)=\frac{1}{4}$，

$P(Z=7)=P(M=7,Y\geqslant7)+P(M=8,Y=7)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$,

$P(Z=8)=P(M=Y=8)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$,所以,$Z$ 的分布列为:

Z	6	7	8
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\therefore E(Z)=6\times\frac{1}{4}+7\times\frac{5}{8}+8\times\frac{1}{8}=\frac{55}{8}$,它与购置轴承的成本之比为

$\frac{E(Z)}{1000+400+400}=\frac{11}{2880}$.

$\because \frac{29}{8000}<\frac{11}{2880}$,$\therefore$从性价比的角度考虑,方案二更实惠. …………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题意:$y=(x-1)^2+\sqrt{2}$ 的顶点为 $(1,\sqrt{2})$,焦距为 $2\sqrt{2}$,

故 $\begin{cases}\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=2,\end{cases}$ 解得 $a^2=4,b^2=2$,所以 C 的方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$; …………………………… 4 分

(2)因为直线 $y=kx+m$ 与 C 相交于 A,B 两点,且 A,B 关于直线 $l:x+ty+1=0$ 对称,

故直线 l 垂直 AB,所以 $k=t$,联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1,\end{cases}$ 可得 $(k^2+2)x^2+2kmx+m^2-4=0$, …… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$,则 $\Delta=8(2k^2+4-m^2)>0$,$x_0=-\frac{km}{k^2+2}$,$y_0=kx_0+m=\frac{2m}{k^2+2}$,因为 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $l:x+ky+1=0$ 上,所以 $-\frac{km}{k^2+2}+\frac{2km}{k^2+2}+1=0$,即

$m=-\left(k+\frac{2}{k}\right)$, ……………………………………………………………… 8 分

所以 $\Delta=8\left(k^2-\frac{4}{k^2}\right)>0$,即 $k^2>2$,$|AB|=\sqrt{k^2+1}\frac{\sqrt{\Delta}}{k^2+2}=\frac{2\sqrt{2(k^2+1)(k^2-2)}}{\sqrt{k^2(k^2+2)}}$,$O$ 到直线

AB 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{k^2+2}{\sqrt{k^2(k^2+1)}}$, ……………………………………………… 10 分

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{\sqrt{2(k^4-4)}}{k^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$,

解得 $k^2=3$,$k=\pm\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)$f'(x)=\ln x+1-\frac{3}{2}x^2$,设 $\phi(x)=f'(x)$,$\phi'(x)=\frac{1}{x}-3x=\frac{1-3x^2}{x}$. ………… 1 分

当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时,$\phi'(x)>0$,$\phi(x)$ 递增;当 $x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 时,$\phi'(x)<0$,$\phi(x)$ 递减.

所以 $\phi(x)$ 的最大值即 $\phi(x)$ 的极大值为 $\phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1-\ln 3}{2}<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减,即在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上递减, ……………………………………… 4 分

官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上有零点，则 $f\left(\frac{1}{e}\right)\cdot f(1)<0$，则 $\frac{1}{2e^3}+\frac{1}{e}<a<\frac{1}{2}$. ………………… 5 分

(2) $f(x)\leqslant g(x)$，即 $x\ln x-\frac{1}{2}x^3+a\leqslant xe^{1-x}+\frac{2a-1}{2}x^3-x$，

化简 $e^{1-x}-\ln x+ax^2-\frac{a}{x}-1\geqslant 0$，设 $F(x)=e^{1-x}-\ln x+ax^2-\frac{a}{x}-1(x\geqslant 1)$，

$F(1)=0$，$F'(x)=-e^{1-x}-\frac{1}{x}+2ax+\frac{a}{x^2}$，$F'(1)=3a-2$，……………………………………… 7 分

(i) $3a-2\geqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{2}{3}$ 时，令 $h(x)=F'(x)$，$h'(x)=e^{1-x}+\frac{1}{x^2}+2a\left(1-\frac{1}{x^3}\right)>0$，

所以 $F'(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F'(x)\geqslant F'(1)=3a-2>0$，

所以 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)\geqslant F(1)=0$ 恒成立，

即 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立；……………………………………………………………………………… 9 分

(ii) $3a-2<0$，即 $a<\frac{2}{3}$ 时，当 $a\leqslant 0$ 时，$F'(x)=-\left(e^{1-x}+\frac{1}{x}\right)+a\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)<0$ 恒成立，

所以 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F(x)<F(1)=0$ 恒成立，即 $f(x)\leqslant g(x)$ 不成立；当 $0<a<\frac{2}{3}$ 时，$F'(1)=3a-2<0$，

$F'\left(\frac{1}{a}\right)=a^3-a+2-e^{1-\frac{1}{a}}=a^3+(1-a)+\left(1-e^{1-\frac{1}{a}}\right)$，

$e^{1-\frac{1}{a}}<e^{1-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}<e^0=1$，所以 $F'\left(\frac{1}{a}\right)>0$，又 $h'(x)=e^{1-x}+\frac{1}{x^2}+2a\left(1-\frac{1}{x^3}\right)>0$，

所以 $F'(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F'(x)$ 在区间 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上存在唯一的零点，设为 x_0，

当 $x\in(1,x_0)$ 时 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在区间 $(1,x_0)$ 上单调递减，

所以 $F(x)<F(1)=0$，即 $f(x)\leqslant g(x)$ 在区间 $(1,x_0)$ 上不成立. ……………………………… 11 分

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$. ……………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。