2023年深圳市高三年级第一次调研考试
数学试题参考答案及评分标准

2023.2

本试卷22小题，满分150分。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	A	C	A	D	B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	BC	BCD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. -10　　14. $\dfrac{1}{3}$

15. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$（注：答案不唯一，还可能的答案有$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{1}{2}\right)$等，函数零点$x\approx 0.41868622$）

16. $(x-a)^2+(y+a^2)^2=a^2+a^4$，$\dfrac{4}{5}$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

解：（1）当$n=1$时，$a_1=\dfrac{a_1}{2}+2$，$a_1=4$；当$n=2$时，$a_1+a_2=\dfrac{a_2}{2}+5$，$a_2=2$.

所以$a_1+a_2=6$. ……2分

因为$S_n=\dfrac{a_n}{2}+n^2+1$ ①，所以$S_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{2}+(n+1)^2+1$ ②.

②−①得，$a_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{2}-\dfrac{a_n}{2}+(n+1)^2-n^2$，整理得$a_n+a_{n+1}=4n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以$(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=[4(n+1)+2]-(4n+2)=4$（常数），$n\in\mathbf{N}^*$. ……4分

所以$\{a_n+a_{n+1}\}$是首项为6，公差为4的等差数列. ……5分

（2）由（1）知，$a_{n-1}+a_n=4(n-1)+2=4n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$. ……6分

当n为偶数时，$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=\dfrac{\frac{n}{2}(6+4n-2)}{2}$

$=n^2+n$； ……7分

当 n 为奇数时，$S_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=4+\dfrac{\frac{n-1}{2}(10+4n-2)}{2}$

$=n^2+n+2$. ……………………………………9 分

综上所述，$S_n=\begin{cases}n^2+n, & 当n为偶数时,\\ n^2+n+2, & 当n为奇数时.\end{cases}$ ……………………………………10 分

18.（12 分）

解：（1）由已知得，$b+c=\sqrt{3}a\sin C+a\cos C$，……………………………………1 分

由正弦定理可得，$\sin B+\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin A\cos C$，……………………………………2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，代入上式，整理得

$\cos A\sin C+\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C$，……………………………………3 分

又因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即 $\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$. …………5 分

而 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………6 分

（2）在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得，$CD^2=b^2+\frac{c^2}{4}-2b\cdot\frac{c}{2}\cos A$.

而 $A=\frac{\pi}{3}$，$CD=a$，所以 $a^2=b^2+\frac{c^2}{4}-\frac{bc}{2}$. ① ……………………………………8 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-bc$，② ……………………………………10 分

由①②两式消去 a，得 $3c^2=2bc$，所以 $b=\frac{3c}{2}$.

又 $b-c=1$，解得 $b=3$，$c=2$. ……………………………………11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………12 分

19.（12 分）

证明：（1）连接 DB 交 AC 于点 O，连接 PO.

因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，且 O 为 BD 的中点. ……………………………………1 分

因为 $PB=PD$，所以 $PO\perp BD$. ……………………………………2 分

又因为 $AC,PO\subset$ 平面 APC，且 $AC\cap PO=O$，

所以 $BD\perp$ 平面 APC. ……………………………………3 分

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以，平面 $APC\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………5 分

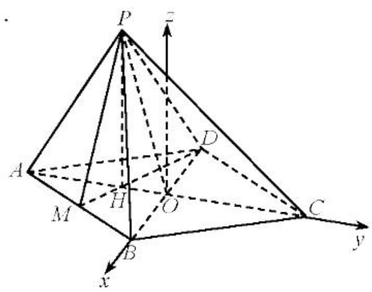
解：（2）取 AB 中点 M，连接 DM 交 AC 于点 H，连接 PH.

因为 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形，

所以 $DM\perp AB$，

又因为 $PD\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 PDM.

所以 $AB\perp PH$.



官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

由（1）知 $BD\perp PH$，且 $AB\cap BD=B$，所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$． ……………………6 分

由 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，在△ABC 中，$AH=\dfrac{AM}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$AO=AB\cdot\cos 30^\circ=\sqrt{3}$．

由 $AP\perp PC$，在△APC 中，

$PH^2=AH\cdot HC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8}{3}$，所以 $PH=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$． ……………………………………7 分

（法一）以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 分别为 x 轴、y 轴建立如图所示空间直角坐标系，

则 $A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$H(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$，$P(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CB}=(1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$． ……………………………8 分

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\to\begin{cases}-x_1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0\\ x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，令 $y_1=1$ 得 $\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{3},1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$． …………9 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}\to\begin{cases}-x_2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0\\ x_2-\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$ 得 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},1,\sqrt{2})$． …………10 分

设平面 PAB 与平面 PBC 的夹角为 θ．

所以，$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1\times1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2+(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以，平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ……………………………………………12 分

（法二）因为 $PB=PA=\sqrt{PH^2+AH^2}=2$，$PC=\sqrt{AC^2-PA^2}=2\sqrt{2}$，

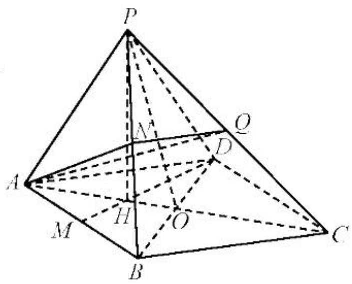
所以，$PB^2+BC^2=PC^2$，所以 $PB\perp BC$． ……………………………………………………8 分

取 PB 中点 N，过点 N 作 $NQ//BC$ 且交 PC 于点 Q，连接 AN，AQ．

因为△APB 是等边三角形，所以 $AN\perp PB$．

又因为 $NQ//BC$，所以 $NQ\perp PB$，

所以 $\angle ANQ$ 为二面角 $C-PB-A$ 的平面角． ……………10 分



在△APB 中，$AN=AB\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

在△BPC 中，$NQ=\dfrac{1}{2}BC=1$，

在△APC 中，$AQ=\sqrt{PA^2+PQ^2}=\sqrt{6}$，

所以，$\cos\angle ANQ=\dfrac{AN^2+NQ^2-AQ^2}{2AN\cdot NQ}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以，平面PAB与平面PBC夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$． ……………………………………12 分

20．（12 分）

解：（1）每次摸到白球的概率$p_1=\frac{2}{3}$，摸到黑球的概率为$p_2=\frac{1}{3}$． ……………………………2 分

每名员工两次摸到的球的颜色不同的概率$p_3=C_2^1p_1p_2=\frac{4}{9}$． ……………………………………4 分

由题意，该部门9名员工中按方式Ⅰ回答问卷的人数$X\sim B(9,p_3)$．

所以，X的数学期望$E(X)=np=9p_3=4$． ……………………………………………………6 分

（2）记事件A为“按方式Ⅰ回答问卷”，事件B为“按方式Ⅱ回答问卷”，事件C为“在问卷中画○”．

由（1）知$P(A)=\frac{4}{9}$，$P(B)=1-P(A)=\frac{5}{9}$，

$P(A)P(C|A)=P(AC)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$． ………………………………………………………9 分

又$P(C)=\frac{4}{4+5}=\frac{4}{9}$，

由全概率公式$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$，得$\frac{4}{9}=\frac{2}{9}+\frac{5}{9}P(C|B)$，

解得$P(C|B)=\frac{2}{5}=0.4$． ………………………………………………………11 分

所以，根据调查问卷估计，该企业员工对新绩效方案的满意度为40%． ……………………12 分

21．（12 分）

解：（1）（法 1）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$．

联立直线l与双曲线E的方程，得$\begin{cases}y=kx-3\\x^2-4y^2=4\end{cases}$， ……………………………………1 分

消去y，得$(1-4k^2)x^2+24kx-40=0$．

由$\Delta=160-64k^2>0$且$1-4k^2\neq0$，得$k^2<\frac{5}{2}$且$k^2\neq\frac{1}{4}$．

由韦达定理，得$x_1+x_2=\frac{-24k}{1-4k^2}$，$x_1x_2=\frac{-40}{1-4k^2}$． ……………………………………2 分

所以$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-12k}{1-4k^2}$，$y_0=kx_0-3=\frac{-12k^2}{1-4k^2}-3=\frac{-3}{1-4k^2}$．

由$\begin{cases}x_0=\frac{-12k}{1-4k^2}\\y_0=\frac{-3}{1-4k^2}\end{cases}$消去$k$，得$x_0^2=4y_0^2+12y_0$． ……………………………………4 分

由$k^2<\frac{5}{2}$且$k^2\neq\frac{1}{4}$，得$y_0\leqslant-3$或$y_0>\frac{1}{3}$．

所以，点M的轨迹方程为$x^2=4y^2+12y$，其中$y\leqslant-3$或$y>\frac{1}{3}$． ………………………6 分

（法 2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$．

（i）当 $k=0$ 时，易得 $M(0,-3)$．

（ii）当 $k\neq 0$ 时，$x_0\neq 0$，

由 $\begin{cases}x_1^2-4y_1^2=4\\x_2^2-4y_2^2=4\end{cases}$，两式相减，整理得 $x_1+x_2=4(y_1+y_2)\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$． ……………………2 分

而 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k=\dfrac{y_0+3}{x_0}$，

所以 $x_0=4y_0\cdot\dfrac{y_0+3}{x_0}$，　即 $x_0^2=4y_0^2+12y_0$． ……………………4 分

综上，点 M 的轨迹方程为 $x^2=4y^2+12y$（除去 $0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{3}$ 的一段）． ……………………6 分

（2）（法 1）双曲线 E 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$．

设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，联立 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x\\y=kx-3\end{cases}$

得 $x_3=\dfrac{6}{2k-1}$，同理可得 $x_4=\dfrac{6}{2k+1}$， ……………………7 分

因为 $\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{-12k}{1-4k^2}=x_0$，

所以，线段 AB 的中点 M 也是线段 CD 的中点．

所以，A、B 为线段 CD 的两个三等分点 $\Leftrightarrow |CD|=3|AB|$． ……………………9 分

即 $\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|=3\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$，$|x_3-x_4|=3|x_1-x_2|$．

而 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(\dfrac{-24k}{1-4k^2})^2+\dfrac{160}{1-4k^2}}$，

$|x_3-x_4|=|\dfrac{6}{2k-1}-\dfrac{6}{2k+1}|=\dfrac{12}{|4k^2-1|}$．

所以，$\dfrac{12}{|4k^2-1|}=3\sqrt{(\dfrac{-24k}{1-4k^2})^2+\dfrac{160}{1-4k^2}}$，解得 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，

所以，存在实数 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，使得 A、B 是线段 CD 的两个三等分点． ……………………12 分

（法 2）双曲线 E 的渐近线方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=0$．设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立直线 l 与双曲线 E 的渐近线方程，得 $\begin{cases}y=kx-3\\x^2-4y^2=0\end{cases}$，

消去 y，得 $(1-4k^2)x^2+24kx-36=0$． ……………………7 分

由韦达定理，得线段 CD 的中点横坐标为 $\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{-12k}{1-4k^2}=x_0$．

所以，线段 AB 的中点 M 也是线段 CD 的中点．

所以，A、B 为线段 CD 的两个三等分点 $\Leftrightarrow |CD|=3|AB|$． ……………………9 分

所以，$\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{(24k)^2+4\times36\times(1-4k^2)}}{|1-4k^2|}=3\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{(24k)^2+4\times40\times(1-4k^2)}}{|1-4k^2|}$

解得 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，

所以，存在实数 $k=\pm\dfrac{3}{2}$，使得 A 、B 是线段 CD 的两个三等分点．……………………12 分

22.（12 分）

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x+4}{e^x}$，定义域为 $\mathbf{R}$．……………………1 分

$f'(x)=-\dfrac{x+3}{e^x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$．……………………2 分

当 $x<-3$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>-3$ 时，$f'(x)<0$．

所以，$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-3)$，单调减区间为 $(-3,+\infty)$．……………………3 分

（2）函数 $f(x)$ 的不动点即为方程 $f(x)-x=0$ 的根，即方程 $\dfrac{a(x+4)}{e^x}-x=0$ 的根．

显然，$x=-4$ 不是方程 $\dfrac{a(x+4)}{e^x}-x=0$ 的根，所以 $\dfrac{a(x+4)}{e^x}-x=0\Leftrightarrow\dfrac{xe^x}{x+4}-a=0$．

记 $F(x)=\dfrac{xe^x}{x+4}-a$（$x\neq-4$），因为 $F'(x)=\dfrac{(x+2)^2e^x}{(x+4)^2}\geqslant0$（当且仅当 $x=-2$ 取等号），

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,-4)$ 和 $(-4,+\infty)$ 上均单调递增．……………………5 分

由 $F(x)=\dfrac{xe^x-a(x+4)}{x+4}$，记 $h(x)=xe^x-a(x+4)$．

①当 $a>0$ 时，

（i）当 $x\in(-\infty,-4)$ 时，$h(-4)=\dfrac{-4}{e^4}<0$，$h(-4-\dfrac{1}{ae})>0$（可证 $xe^x\geqslant-\dfrac{1}{e}$，利用放缩可得），

存在 $t_1\in(-\infty,-4)$，使得 $h(t_1)=0$，即存在唯一 $t_1\in(-\infty,-4)$ 使得 $F(t_1)=0$；

注：也可通过 $x\to-\infty$ 时，$F(x)\to-a$，$x\to-4$ 且 $x<-4$ 时，$F(x)\to+\infty$，存在唯一 $t_1\in(-\infty,-4)$ 使得 $F(t_1)=0$．

（ii）当 $x\in(-4,+\infty)$ 时，$h(0)=-4a<0$，$h(4a)>0$（可证 $e^x\geqslant x+1$），

存在 $t_2\in(0,+\infty)$，使得 $h(t_2)=0$，即存在唯一 $t_2\in(0,+\infty)$ 使得 $F(t_2)=0$．……………………7 分

②当 $a<0$ 时，

（i）当 $x\in(-\infty,-4)$ 时，$F(x)=\dfrac{xe^x}{x+4}-a>0$ 无零点；

（ii）当 $x\in(-4,+\infty)$ 时，因为 $h(0)=-4a>0$，$h(-4)=\dfrac{-4}{e^4}<0$，存在 $t_0\in(-4,0)$，使得 $h(t_0)=0$，

即存在唯一 $t_0\in(-4,+\infty)$ 使得 $F(t_0)=0$．

注：也可通过 $x\to-4$ 且 $x>-4$ 时，$F(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$F(x)\to+\infty$，存在唯一 $t_0\in(-4,+\infty)$ 使得 $F(t_0)=0$．

综上所述，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个“不动点”t_1，t_2；

当$a<0$时，函数$f(x)$有一个“不动点”t_0. ……………………………………8分

（3）由（2）知$f(f(x))-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=t_i$（其中$i\in\{0,1,2\}$）.

由$F(t_i)=0\Rightarrow a=\dfrac{t_i e^{t_i}}{t_i+4}$，代入得$\dfrac{x+4}{e^x}=\dfrac{t_i+4}{e^{t_i}}$.

记$G(x)=\dfrac{x+4}{e^x}$，由（1）知，当$x\in(-\infty,-4]$时，函数$G(x)$单调递增，且$G(x)\in(-\infty,0]$；

当$x\in(-4,-3)$时，函数$G(x)$单调递增，且$G(x)\in(0,e^3)$；

当$x\in(-3,+\infty)$时，函数$G(x)$单调递减，且$G(x)\in(0,e^3)$.

由$G(x)=G(t_1)<0$可得$x=t_1$；$G(x)=G(t_2)>0$可得$x=t_2, x_0$，共三个解. …………10分

所以，$F(t)$有一个零点t_0. 所以$f(f(x))-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=t_0$，由$F(t_0)=0\Rightarrow a=\dfrac{t_0e^{t_0}}{t_0+4}$，

代入得$\dfrac{x+4}{e^x}=\dfrac{t_0+4}{e^{t_0}}$，由（1）知，

当$t_0=-3$，即$a=-\dfrac{3}{e^3}$时，$G(x_1)=G(t_0)$的解为t_0；

当$t_0\neq-3$，即$a<0$且$a\neq-\dfrac{3}{e^3}$时，所$G(x_1)=G(t_0)$的解为x_1，t_0.

综上所述，当$a<0$且$a\neq-\dfrac{3}{e^3}$时方程有两个不同实数根. ………………………………12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。