本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

答案

一、单选题 ADDB　CBCA

二、多选题 AC；　ACD；　ABD；　ACD；

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13.　-2　　14.　23.7　　15. $a_n=\frac{2}{3}n-1$.　　16. $\left(-\sqrt{2},0\right)$ 或 $\left(\sqrt{2},0\right)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解析：（Ⅰ）当 $n\geq 2$ 时，

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$ ......2 分

$=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^1+1=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$ ....4 分

$\because a_1=1$ 满足 $a_n=2^n-1$，$\therefore a_n=2^n-1$ ....5 分

（Ⅱ）$b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$ ....6 分

$=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$ ....8 分

则 $T_n=(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1})+(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1})+(\frac{1}{2^3-1}-\frac{1}{2^4-1})+\cdots+(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})$

$=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$ ....10 分

18. 解析：（Ⅰ）$\because f(x)=2\cos x(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6})$

$=\sqrt{3}\cos x\sin x+\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ .... 4 分

又 $f(A)=\sin(2A+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的最大值，

$2A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}),\therefore 2A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\therefore A=\frac{\pi}{6}$ .... 6 分

（Ⅱ）设 $AB=x$，由余弦定理知：$x^2-6x+8=0,\therefore x_1=2,x_2=4$ ....9 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$.　**..............................12 分**

19. 解析：（Ⅰ）由条件知，若一班在前两轮得 20 分，后三轮得 90 分，总分为 110 分，其概率为

$$C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{64}$$;…………2 分来源：高三答案公众号

若一班在前两轮得 40 分，后三轮得 60 分或 90 分，总分为 100 分或 130 分，其概率为

$$C_2^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left[C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=\frac{9}{32}$$ …………4 分

于是一班总分不少于 100 分的概率为 $\frac{3}{64}+\frac{9}{32}=\frac{21}{64}$…………5 分

（Ⅱ）由条件知 X 的可能值为 60，80，100，120，…………6 分

其分布列为

X	60	80	100	120
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

…………8 分

则 $E(X)=60\times\frac{1}{64}+80\times\frac{9}{64}+100\times\frac{27}{64}+120\times\frac{27}{64}=105$，…………9 分

因为[illegible] $30+30\times3\times\frac{2}{3}=90$，…………11 分

[illegible] $105>90$，[illegible]…………12 分

20【解析】（Ⅰ）$\lambda=\frac{1}{2}$

[illegible] AC [illegible] BD [illegible] F，[illegible] EF

第 20 题解答图（1）　　第 20 题解答图（2）

因为 PC // 平面 EBD，$PC\subset$ 平面 PAC，平面 $PAC\cap$ 平面 $EBD=EF$，所以 PC // EF.

因为 AB // CD，所以 $\triangle ABF\backsim\triangle CDF$，所以 $\frac{AF}{FC}=\frac{AB}{DC}=\frac{1}{2}$.

又 PC // EF，所以 $\frac{AE}{EP}=\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$.　　…………5 分

（Ⅱ）方法一、如图（2），取 BD 中点 O，连接 PO. 因为 $\triangle PBD$ 是等边三角形且与底面垂直，所以 $PO\perp BD$，从而 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

分别以 OB，OP 所在的直线为 x 轴，z 轴，以过点 O 与 CD 平行的直线为 y 轴，建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 则 $A(1,-1,0)$，$B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$.

…………7 分

由 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{EP}$，得 $E\left(\frac{1}{1+\lambda},-\frac{1}{1+\lambda},\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}\right)$，则 $\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{1+\lambda}-1,-\frac{1}{1+\lambda},\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}\right)$，

$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{1+\lambda}+1,-\frac{1}{1+\lambda},\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}\right)$.

设平面 EBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(x_0,y_0,z_0)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，得

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{1+\lambda}-1\right)x_0-\frac{1}{1+\lambda}y_0+\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}z_0=0,\\ \left(\frac{1}{1+\lambda}+1\right)x_0-\frac{1}{1+\lambda}y_0+\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}z_0=0\end{cases},$$

所以 $x_0=0$，取 $y_0=\sqrt{3}\lambda$，$z_0=1$，$\overrightarrow{m}=(0,\sqrt{3}\lambda,1)$. …………9分

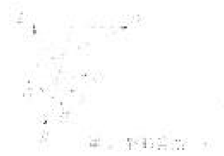
又平面 PBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(0,1,0)$，所以 $\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+1}}$.

由 $\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\lambda=1$.

所以 $\lambda=1$ 时，平面 EBD 与平面 PBD 所成的锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{6}$. …………12分

方法二：如图（3），取 BD 中点 O，连接 PO，AO，作 $EG\perp AO$，[illegible] $GH\perp BD$，垂足分别为 G，H.

因为△PBD 是等边三角形，[illegible]，所以 $PO\perp BD$，所以 $EG\perp BD$，又 $GH\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面 EHG，所以 $BD\perp EH$，所以 $\angle EHG$ 是平面 EBD 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的平面角.



因为平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 EBD 与平面 PBD 所成的锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{6}$，所以平面 EBD 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle EHG=\frac{\pi}{3}$.

因为 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{EP}$，所以 $\frac{EG}{PO}=\frac{AE}{AP}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$，所以 $EG=\frac{\lambda}{1+\lambda}PO=\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}$.

…………9分

因为 $AB\perp BD$，$GH\perp BD$，所以 $GH\parallel AB$，所以△OGH∽△OAB，所以 $\frac{GH}{AB}=\frac{OG}{OA}=\frac{PE}{PA}=\frac{1}{1+\lambda}$，所以 $GH=\frac{1}{1+\lambda}AB=\frac{1}{1+\lambda}$. …………11分

在 Rt△EGH 中，$EG=GH\cdot\tan\angle EHG=GH\cdot\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}GH$，所以 $\frac{\sqrt{3}\lambda}{1+\lambda}=\sqrt{3}\frac{1}{1+\lambda}$，

所以 $\lambda=1$. …………12分

21.【解析】(Ⅰ) 如图（1），连接 CM，因为 M 为线段 AB 的中点，所以 $CM\perp AB$.

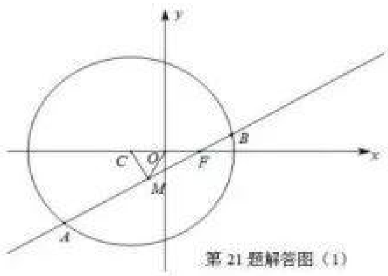
又 O 是线段 CF 的中点，所以 $|OM|=\frac{1}{2}|CF|=1$，

所以 $x_0^2+y_0^2=1$. …………2分

令 $x=2x_0$，$y=\sqrt{3}y_0$，则 $x_0=\frac{x}{2}$，$y_0=\frac{y}{\sqrt{3}}$，

所以 $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=1$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

所以动点 P 的轨迹Γ方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.



第 21 题解答图（1）

………… 5 分

（II）由（I）知，$D(-2,0)$，$E(2,0)$，直线 DP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}y_0}{2x_0+2}(x+2)$，

所以垂线 n 的方程为 $y=-\frac{2x_0+2}{\sqrt{3}y_0}(x-1)$，得 $Q\left(-2,\frac{6x_0+6}{\sqrt{3}y_0}\right)$.

所以 $k_{PQ}=\frac{\frac{6x_0+6}{\sqrt{3}y_0}-\sqrt{3}y_0}{-2-2x_0}$，$k_{PE}=\frac{-\sqrt{3}y_0}{2-2x_0}$.

所以 $k_{PQ}-k_{PE}=\frac{\frac{6x_0+6}{\sqrt{3}y_0}-\sqrt{3}y_0}{-2-2x_0}-\frac{-\sqrt{3}y_0}{2-2x_0}=-\frac{2\sqrt{3}(x_0-1)-\sqrt{3}y_0^2}{2(1+x_0)y_0}-\frac{\sqrt{3}y_0}{2(1-x_0)}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{y_0}-\frac{\sqrt{3}y_0}{2(1-x_0)}+\frac{\sqrt{3}y_0}{2(1-x_0)}=-\frac{\sqrt{3}}{y_0}+\frac{\sqrt{3}y_0}{1-x_0^2}$，

因为 $x_0^2+y_0^2=1$，所以 $1-x_0^2=y_0^2$，所以 $k_{PQ}-k_{PE}=-\frac{\sqrt{3}}{y_0}+\frac{\sqrt{3}y_0}{y_0^2}=0$，

这说明点 P，Q，E 共线. ……… 12 分

22. 解析：（Ⅰ）$f'(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)e^{\frac{a}{x}}-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(e^{\frac{a}{x}}+\frac{1}{x}\right)$，$x\in(0,+\infty)$ ……… 1 分

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；……… 2 分

②若 $a>0$，则 $x\in(0,\ a)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；故函数 $f(x)$ 在 $(0,\ a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ……… 4 分

（Ⅱ）令 $t=h(x)=xe^{\frac{a}{x}}$，则 $\ln t=\ln x+\frac{a}{x}$，……… 5 分

设 $g(t)=t+\ln t$，则 $g'(t)=1+\frac{1}{t}>0$，$g(t)$ 为增函数，$t'=h'(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)e^{\frac{a}{x}}$，

①若 $a\leqslant 0$，则 $h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；则 $f(x)=g[h(x)]$ 为增函数，故方程

$f(x)=e+1$ 不可能有两个根；……… 7 分

②若 $a>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,\ a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，由于 $g(e)=e+1$，

$f(x)=g[h(x)]$，从而必须 $h(x)=e$ 有两个实根，必须 $[h(x)]_{\min}=ae<e$，从而 $0<a<1$…… 9 分

由于 $h(e)=e^{\frac{a}{e}+1}>e$，则 $h(x)=e$ 在 $(a,+\infty)$ 上恰有一个根；

考察函数 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-x-1\geqslant 0$，故 $\varphi(x)$ 为单调递增函数，当

$x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)\geqslant 0$，即 $e^x\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+1$，所以

$h(x)=xe^{\frac{a}{x}}\geqslant x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{a}{x}+1\right]=\frac{a^2}{2x}+x+a$，由于 $x\in(0,\ a)$，$0<a<1$，取

$0<x_0=\frac{a^2}{2e}<a<1$，则 $h(x_0)\geqslant\frac{a^2}{2x_0}+x_0+a=e+\frac{a^2}{2e}+a>e$，则 $h(x)=e$ 在 $(0,\ a)$ 上恰有一个

根，故 $h(x)=e$ 有两个实根.

所以，$0<a<1$ 为所求. ……… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。