湖北省重点高中智学联盟 2023 年秋季高三年级 10 月联考

数学答案

1.B　2.A　3.B　4.A　5.B　6.C　7.D　8.C　9.ABD　10.ACD　11.AB　12.BC

13. 16　14. π　15.$\left[\frac{8}{3},4\right]$　16$\left\{t\middle|-e\le t<0\ 或t=\frac{1}{e}\right\}$

12. 解法一：$f'(x)=-3x^2+4x-3$，设切点为$(x_0,-x_0^3+2x_0^2-3x_0)$，

则切线方程为$y+x_0^3-2x_0^2+3x_0=(-3x_0^2+4x_0-3)(x-x_0)$，

将$x=-2$，$y=m$代入得，$m=2x_0^3+4x_0^2-8x_0+6$，

令$g(x)=2x^3+4x^2-8x+6$，则$g'(x)=6x^2+8x-8=2(x+2)(3x-2)$，

$\therefore x>\frac{2}{3}$或$x<-2$时，$g'(x)>0$，当$-2<x<\frac{2}{3}$时，$g'(x)<0$，

故函数$g(x)$的单增区间为$(-\infty,-2)$和$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$，$g(x)$的单减区间为$\left(-2,\frac{2}{3}\right)$，

$\therefore g(x)$的极大值为$g(-2)=22$，极小值为$g(\frac{2}{3})=\frac{82}{27}$，

由题意知，$\frac{82}{27}<m<22$，又m为整数，

$\therefore m=4$，5，……20，21

解法二：$f'(x)=-3x^2+4x-3$，$f''(x)=-6x+4$，$\therefore$函数$f(x)$的对称中心坐标为 P$\left(\frac{2}{3},f(\frac{2}{3})\right)$

$=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{38}{27}\right)$，函数$f(x)$在点 P 处切线方程为$y-\left(-\frac{38}{27}\right)=f'(\frac{2}{3})(x-\frac{2}{3})$，即为$y+\frac{38}{27}=-\frac{5}{3}(x-\frac{2}{3})$，再令

$x=-2$，得$y=\frac{82}{27}$，又$f(-2)=22$,由题意知，$\frac{82}{27}<m<22$，又m为整数，

$\therefore m=4$，5，……20，21

16. (1)当 a > 1 时，先求？的值，有一个交点时，由题意可知切点在直线 y = x 上，设切点横坐标为x_0，

由导数几何意义可知$\frac{1}{x_0\cdot lna}=a^{x_0}\cdot\ln a=1$, $\therefore a^{x_0}$=e,$\ln a=\frac{1}{e}$ ， a=$e^{\frac{1}{e}}$ ；

(2)由$e^{tx}=\frac{1}{t}\ln x$，可得$(e^t)^x=\log_{e^t}x$，令$e^t=a$，则$\log_a x=a^x$（$0<a$ 且 $a\neq1$），

由提供的信息可得，$e^{-e}\le a=e^t<1$ 或 $a=e^t=e^{\frac{1}{e}}$，$\therefore\left\{t\middle|-e\le t<0\ 或t=\frac{1}{e}\right\}$

17.解：(1) $\because A=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$\therefore A=(1,3)$，　………………………（1 分）

又由$\frac{x-2}{x-4}\le0$，得$(x-2)(x-4)\le0$，且$(x-4)\neq0\ \therefore B=[2,4)$，　……………（3 分）

$\therefore A\cap B=[2,3)$，　………………………（4 分）

$\because \complement_U B=(-\infty,2)\cup[4,+\infty)$，

$\therefore A\cup(\complement_U B)=(-\infty,3)\cup[4,+\infty)$；　……………………（6 分）

(2) $\because B\cup C=B$，$\therefore C\subseteq B$，　……………………（7 分）

又$\because C=[a,a+1]$，$B=[2,4)$，

$\therefore\begin{cases}a\ge 2,\\ a+1<4,\end{cases}$解得 $2\le a<3$， ……………………（9 分）

∴实数a的取值范围为$[2,3)$. ……………………（10 分）

18.解：(1) ∵函数$f(x)$是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$ ………………………（1 分)

即$\frac{2^{-x}+a}{2^{-x}+1}=-\frac{2^x+a}{2^x+1}$，整理有　对于$\forall x\in R,(1+a)(2^x+1)=0,\therefore a=-1$ ………………（4 分）

（此处用$f(0)=0$ 得出$a=-1$ 的如果没有验证函数$f(x)$是奇函数的扣 2 分）

(2) 函数$f(x)$在 R 上单调递增，证明如下： ………………（5 分）

$\because f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，$\therefore f'(x)=\frac{2ln2\cdot 2^x}{(2^x+1)^2}>0$,

∴函数$f(x)$在 R 上单调递增 ……………（8 分）

用单调性定义证明的同样给分。

（3）设 $A=\{y|y=g(x_1),x_1\in[0,1]\}$,$B=\{y|y=3f(x_2),x_2\in[0,1]\}$,

有条件可知，$A\subseteq B$ …… …… …（9 分）

由（2）问可知，$y=3f(x_2)$在$x_2\in[0,1]$时单调递增，$\therefore B=[0,1]$， ……………（10 分）

又∵ $A=\left[b,\frac{1}{2}+b\right]$，$\therefore\begin{cases}b\ge 0\\ \frac{1}{2}+b\le 1\end{cases}$，$\therefore 0\le b\le\frac{1}{2}$ ……………（12 分）

19. 解：（1）$\sin 40°(\sqrt{3}-\tan 10°)=\sin 40°(\sqrt{3}-\frac{sin10°}{cos10°})$ ……………（1 分）

$=\sin 40°(\frac{\sqrt{3}cos10°-sin10°}{cos10°})=\sin 40°\frac{2\sin(60°-10°)}{cos10°}=\sin 40°\frac{2cos40°}{cos10°}=\frac{sin80°}{cos10°}=1$ ……………（6 分）

(2)方法一：$sin^2 10°+cos^2 40°+sin10°\cos40°=\frac{1-cos20°}{2}+\frac{1+cos80°}{2}+\frac{-sin30°+sin50°}{2}$ ……（8 分）

$=1-\frac{1}{4}+\frac{cos80°-\cos 20°+sin50°}{2}=\frac{3}{4}+\frac{cos80°-\cos 20°+sin50°}{2}$

$=\frac{3}{4}+\frac{cos(50°+30°)-cos(50°-30°)+sin50°}{2}=\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}$ ………（12 分）

方法二：构造对偶式

设$m=sin^2 10°+cos^2 40°+sin10°cos40°$,$n=cos^2 10°+sin^2 40°+cos10°sin40°$,则……（8 分）

$m+n=2+sin50°$，　$n-m=\cos 20°-cos80°+sin30°$，则

$2m=2-\frac{1}{2}+sin50°-\cos 20°+cos80°=\frac{3}{2}$，$\therefore m=\frac{3}{4}$ ………（12 分)

方法三：构造三角形，令外接圆半径为$\frac{1}{2}$，则由正弦定理可得

$\frac{a}{sin10°}=\frac{b}{sin50°}=\frac{c}{sin120°}=2R=2\times\frac{1}{2}=1$， ………（8 分）

则　$a=sin10°$, $b=\cos40°=sin50°$, $c=sin120°$　,再由余弦定理，

$c^2=a^2+b^2-2abcosC=sin^2 10°+sin^2 50°-2sin10°\sin50°cos120°=sin^2 120°=\frac{3}{4}$

……（12 分)

20. 解：（1）记事件 A="求恰有一个黑球"，则由古典概型公式可得

$P(A)=\frac{C_8^1 C_7^3}{C_{15}^4}=\frac{8}{39}$; ………（3 分）

（2）X 的可能取值为 0,1,2,3,4， ………（4 分）

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{C_8^4}{C_{15}^4}=\frac{2}{39}$，$\mathrm{P}(X=1)=\frac{C_8^3C_7^1}{C_{15}^4}=\frac{56}{195}$，$\mathrm{P}(X=2)=\frac{C_8^2C_7^2}{C_{15}^4}=\frac{84}{195}$，

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{C_8^1C_7^3}{C_{15}^4}=\frac{8}{39}$，$\mathrm{P}(X=4)=\frac{C_7^4}{C_{15}^4}=\frac{1}{39}$，　X 的分布列如下：　………（7 分）

（概率对了一个给 1 分，不超过 7 分，此处没有约分的不扣分）

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{2}{39}$	$\frac{56}{195}$	$\frac{84}{195}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{39}$

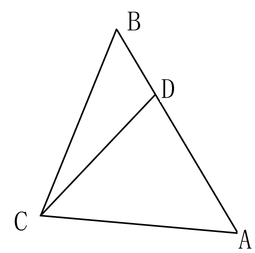
$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{39}+1\times\frac{56}{195}+2\times\frac{84}{195}+3\times\frac{8}{39}+4\times\frac{1}{39}=\frac{364}{195}=\frac{28}{15}$　………（9 分）

（此处没有约分的扣 1 分）

（3）记事件 B=" 取出 4 个球同色，求全为红球"，则由条件概率公式有

$\mathrm{P}(B)=\frac{C_7^4}{C_8^4+C_7^4}=\frac{1}{3}$.　………（12 分）

21.解：（1）



在ΔBCD 中，$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin\angle DBC=2\sqrt{3}$,且 $BD=2,\angle DBC=\frac{\pi}{3}$，可得 BC=4（2 分）

在ΔBCD 中，由余弦定理有，$DC^2=DB^2+BC^2-2DB\cdot BC\cdot\cos\angle DBC=12$,

$\therefore DC=2\sqrt{3}$　……（5 分）

（2）记$\angle DCA=\theta,\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，则$\angle BDC=2\theta$,，$\angle DAC=\theta,\angle BCD=\frac{2\pi}{3}-2\theta$，

$\angle ADC=\pi-2\theta$，　……（6 分）

记 AD=DC=m,BC=a,

在ΔBCD 中,由正弦定理有$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，$\therefore\frac{a}{\sin2\theta}=\frac{2}{\sin(\frac{2\pi}{3}-2\theta)}=\frac{m}{\sin\frac{\pi}{3}}$　……（7 分）

在ΔACD 中，由正弦定理有$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，$\therefore\frac{2\sqrt{3}}{\sin2\theta}==\frac{m}{\sin\vartheta}$，　……（8 分）

$\therefore m\cdot\sin2\theta=2\sqrt{3}\sin\theta=a\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，　$\therefore a=4\sin\theta$，即有$\frac{4\sin\theta}{\sin2\theta}=\frac{2}{\sin(\frac{2\pi}{3}-2\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}$，　**……（9 分）**

$\therefore\boldsymbol{\sin(\frac{2\pi}{3}-2\theta)}=\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}\mp\theta\right)$，$\therefore\angle DCA=\theta=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{18}$　**……（12 分）**

（掉了一个解扣 2 分）

22.解：（1）$\because f(x)=x\ln x,(x>0)\therefore f'(x)=\ln x+1$,

令$f'(x)=0$，可得$x=\frac{1}{e}$，列表如下：　……………（1 分）

x	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↓	极小值$-\frac{1}{e}$	↑

………（2 分）

$\therefore f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$，单调递增区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，极小值为$-\frac{1}{e}$，无极大值。

（“无极大值”掉了的扣 1 分） ……（4 分）

（2）解法 1：要证$e^x-2x>x\cdot xlnx$，只需证$\frac{e^x-2x}{x^2}>lnx$（对数靠边走）………（5 分）

设$g(x)=\frac{e^x-2x}{x^2}-lnx$，则$g'(x)=\frac{(e^x-x)\cdot(x-2)}{x^3}$，易知$e^x\geq x+1>x$,令$g'(x)=0$，可得$x=2$，列表如下： ……（6 分）

x	(0,2)	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	+
$g(x)$	↓	极小值 g(2)	↑

$\therefore \boldsymbol{g}(x)_{min}=g(2)=\frac{e^2-4}{4}-\ln2==\frac{e^2-(4+4ln2)}{4}$，由于$e^2\approx7.39>7$，$e^3\approx20.09>16$, …（7 分）

$4+4ln2=4+ln16<4+lne^3=7$， ……（8 分）

$\therefore e^2-(4+4ln2)>0$，从而不等式得证。 ……（9 分）

解法 2：要证$e^x-2x>x\cdot xlnx$，只需证$\frac{x^2lnx+2x}{e^x}<1$， （指数找朋友） ………（5 分）

设$h(x)=\frac{x^2lnx+2x}{e^x}$，则$h'(x)=\frac{(xlnx+1)\cdot(2-x)}{e^x}$，又因为（1）中的$f(x)=xlnx$的最小值即为极小值$-\frac{1}{e}$，

$\therefore \boldsymbol{xlnx+1>0}$,从而列表如下： ……（6 分）

x	(0,2)	2	$(2,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	$-$
$h(x)$	↑	极大值 h(2)	↓

$e^2\approx7.39>7$，$e^3\approx20.09>16$, ………（7 分）

从而$h(x)_{max}=h(2)=\frac{4ln2+4}{e^2}=\frac{ln16+4}{e^2}<\frac{lne^3+4}{e^2}=\frac{3+4}{e^2}=\frac{7}{e^2}<1$， 从而不等式得证。 ……（9 分）

其他的证明方法参照给分。

（3）设$\varphi(x)=-x^2+(a+1)x-a$，由数形结合可得 $\begin{cases}f(1)\leq\varphi(1)\\f(2)\leq\varphi(2)\\f(3)\leq\varphi(3)\\f(4)>\varphi(4)\end{cases}$，解得$\left\{a\middle|\frac{3ln3+6}{2}\leq a<\frac{4ln4+12}{3}\right\}$

……（12 分）