县(市、区)＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 考生号＿＿＿＿ 考场号＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿

装 订 线

绝密★启用前

"天一大联考·皖豫名校联盟"
2021—2022学年(下)高二年级阶段性测试(期末)

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$,则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap\mathbf{Z}=$

A. $\{-2,-1,0,1,2,3\}$　B. $\{-2,-1,0,1,2\}$

C. $\{-1,0,1,2,3\}$　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 已知复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$,若 $\bar{z}+i=4+2i$,则 $z\bar{z}=$

A. 17　B. 18　C. 24　D. 25

3. 已知函数 $f(x)$ 的图象是一条连续的曲线,设 p:$f(x)$ 的定义域为一个闭区间;q:$f(x)$ 的值域为一个闭区间.则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分又不必要条件

4. 在一些山谷中有一种奇特的现象,在一处呼喊一声,在另一处会间隔听到两次呼喊,前一次是声音直接传到听者耳朵中,后一次是声音经过山壁反射后再传到听者耳朵中.假设有一片椭圆形状的空旷山谷,甲、乙两人分别站在椭圆的两个焦点处,甲呼喊一声,乙经过2 s听到第一声,又过3 s听到第二声,则该椭圆的离心率为

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{2}{5}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

5. 现有10本书,其中有4本不同的英文读物,6本不同的中文读物,某学生计划一年看完这10本书,为了缓解疲劳,要求英文读物不能相邻阅读,则可以排出的阅读顺序总数为

A. $A_7^7A_6^4$　B. $A_4^4A_6^6$　C. $A_6^6A_7^7$　D. $A_6^6A_7^4$

6. 某中学共有2 400名男生,为了解该校的男生身高情况,随机抽取该校100名男生,测量身高,通过数据分析得到该校男生的身高 H(单位:cm)服从正态分布 $N(176,5^2)$,若将 $H\geq191$ 的学生视为超高,则该校超高的男生约有

参考数据:若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)\approx0.682\,7$,$P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\approx0.954\,5$,$P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)\approx0.997\,3$.

A. 1名　B. 2名　C. 3名　D. 4名

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,2)$,若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$

A. $-\frac{12}{5}$　B. $-\frac{4}{5}$　C. $\frac{4}{5}$　D. $\frac{32}{5}$

8. 将函数 $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍,再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象,则下列说法正确的是

A. $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

B. $g(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上存在零点

C. $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(4k\pi+\frac{\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

D. $g(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=4k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,$f(x+1)$ 为偶函数,$f(4+x)=-f(-x)$,且 $f(1)=2$,则 $f(2\,023)=$

A. 2　B. 1　C. -2　D. -3

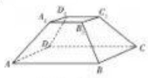
10. 已知抛物线 C:$x^2=12y$ 的焦点为 F,其准线与 y 轴的交点为 A,点 B 为抛物线上一动点,当 $\frac{|AB|}{|FB|}$ 取得最大值时,直线 AB 的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

11. 设数列 $\{a_n\}$ 中,a_n 是不大于 $\sqrt{n}$ 的最大整数,其中 $n\in\mathbf{N}^*$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=$

A. 525　B. 615　C. 625　D. 715

12. 如图所示,正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点都在表面积为 4π 的球面上,侧棱长为1,且侧棱与底面所成角为45°,则其上、下底面积之比为

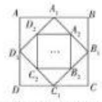


A. $7-4\sqrt{3}$　B. $4-2\sqrt{3}$　C. $2-\sqrt{3}$　D. $\sqrt{3}-1$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知函数 $f(x)=2f'(1)x+3e^x-2$,$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,则 $f'(1)=$＿＿＿＿.

14. 如图,在边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中,点 A_1,B_1,C_1,D_1 分别为正方形 $ABCD$ 各边的中点,点 A_2,B_2,C_2,D_2 分别为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 各边的中点,…,记正方形 $A_nB_nC_nD_n$ 的面积为 a_n,若数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和 $S_m=\frac{63}{32}$,则 $m=$＿＿＿＿.



15. 为了解高三学生复习的效果,某学校进行了预测考试,随机抽查了5名学生的语文成绩与数学成绩,得到如下数据:

学生	甲	乙	丙	丁	戊
语文	76	89	110	128	132
数学	82	94	135	115	124

现从这5人中任选3人进行学习方法的分享,用 X 表示其中语文分数大于数学分数的人数,则 $E(X)=$＿＿＿＿.

16. 满足不等式$(m^3+3)\ln\sqrt{m^6+6m^2+10}+m\ln(4m^2+1)>0$的实数$m$的取值范围是________.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

在锐角$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$2a\sin B\cos C+2c\cos A\sin B=\sqrt{3}b$.

(Ⅰ)求B;

(Ⅱ)若$b=a+2,c=a+3$,求$\triangle ABC$的面积.

18.(12 分)

在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,已知$2a_1a_2=a_3,a_1+a_2=3$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设$b_n=\log_2 a_{n+1}$,数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$S_n$,证明:$2-\frac{1}{a_n}\geqslant 2S_n$.

19.(12 分)

为了解温度对物质A参与的某种化学反应的影响,研究小组在不同温度条件下做了四次实验,实验中测得的温度x(单位:℃)与A的转化率$y\%$$\left(转化率=\frac{A的转化量}{A的起始量}\right)$的数据如下表所示:

x	45	55	65	75
y	23	38	65	74

(Ⅰ)求y与x的相关系数(结果精确到 0.01);

(Ⅱ)该研究小组随后又进行了一次该实验,其中A的起始量为 50 g,反应结束时还剩余 2.5 g,若已知y关于x的经验回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x-58$,估计这次实验是在多少摄氏度的温度条件下进行的.

参考数据:$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=12\,900$,$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=14\,900$,$\sum\limits_{i=1}^{4}y_i^2=11\,674$,$\sqrt{8\,370}\approx 91.5$.

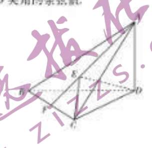
参考公式:相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

20.(12 分)

如图所示,在三棱锥$A-BCD$中,已知平面$ABD\perp$平面BCD,且$BD=\sqrt{6}$,$AD=\sqrt{2}$,$AB=2\sqrt{2}$,$BC\perp AC$.

(Ⅰ)证明:$BC\perp$平面ACD;

(Ⅱ)若点F为棱BC的中点,$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EF}$,且$CD=\sqrt{3}$,求平面$CDE$与平面$ABD$夹角的余弦值.



21.(12 分)

设直线$x=m(m>0)$与双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{3}=m$的两条渐近线分别交于A,B两点,且$\triangle OAB$(O为坐标原点)的面积为$\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求m的值;

(Ⅱ)与坐标轴不垂直的直线l与C交于M,N两点,点M关于x轴的对称点为M',F为C的右焦点,若M',F,N三点共线,证明:直线l经过x轴上的一个定点.

22.(12 分)

已知函数$f(x)=\ln(x+1)-x-\frac{x^3}{3}$.

(Ⅰ)求$f(x)$的单调区间;

(Ⅱ)若当$x>-1$时,$f(x)\leqslant ax^2$,求实数a的取值范围.

“天一大联考·皖豫名校联盟”
2021—2022 学年(下)高二年级阶段性测试(期末)

数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. D	2. A	3. A	4. B	5. D	6. C
7. B	8. D	9. C	10. D	11. C	12. A

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $-3e$　　14. 6

15. $\frac{6}{5}$　　16. $(-1,+\infty)$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析** (Ⅰ)由条件及正弦定理得 $2\sin A\sin B\cos C+2\sin C\cos A\sin B=\sqrt{3}\sin B$,

因为 $\sin B\neq 0$,所以 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……(2 分)

所以 $\sin(A+C)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……(3 分)

因为△ABC 是锐角三角形,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ……(5 分)

(Ⅱ)由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$. ……(6 分)

所以 $(a+2)^2=a^2+(a+3)^2-a(a+3)$,

解得 $a=5$, ……(8 分)

所以 $c=a+3=8$,

所以△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$. ……(10 分)

18. **解析** (Ⅰ)由题意知 $a_n>0$,设其公比为 $q(q>0)$, ……(1 分)

由题意 $\begin{cases}2a_1a_2=a_3,\\a_1+a_2=3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1^2q=a_1q^2,\\a_1(1+q)=3,\end{cases}$ ……(3 分)

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\q=2.\end{cases}$ ……(4 分)

所以 $a_n=2^{n-1}$. ……(5 分)

(Ⅱ)由已知得 $b_n=\log_2a_{n+1}=n$,

所以 $\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, ……(7 分)

所以 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$. ……(9 分)

待证的不等式可化为 $2(1-S_n)\geqslant\frac{1}{a_n}$,即 $\frac{2}{n+1}\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$,只需证明 $2^n\geqslant n+1$. ……(10 分)

设函数 $f(x)=2^x-x-1$,当 $x\geqslant1$ 时,$f'(x)=2^x\ln2-1>0$,所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=0$.

因此 $2^n\geqslant n+1$，原命题得证. ……………………………………………… (12 分)

19. **解析** （Ⅰ）$\bar{x}=\dfrac{45+55+65+75}{4}=60$，$\bar{y}=\dfrac{23+38+65+74}{4}=50$，……………… (2 分)

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{4}y_i^2-4\bar{y}^2\right)}}$ ……………… (4 分)

$=\dfrac{900}{\sqrt{500\times 1\,674}}=\dfrac{900}{10\sqrt{8\,370}}=\dfrac{90}{91.5}\approx 0.98.$ ……………………………… (6 分)

（Ⅱ）根据回归直线的性质，$\bar{y}=b\bar{x}-58$，即 $50=60b-58$，得 $b=1.8$. ……………………… (8 分)

由条件可知 $\hat{y}=\dfrac{50-2.5}{50}\times 100=95$，……………………………………………… (10 分)

令 $1.8x-58=95$，得 $x=85$，

因此估计这次实验是在 85℃的温度条件下进行的. ……………………………………… (12 分)

20. **解析** （Ⅰ）由条件可得 $BD^2+AD^2=AB^2$，所以 $AD\perp BD$. ……………………………… (1 分)

因为平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

所以 $AD\perp$ 平面 BCD，……………………………………………………………… (3 分)

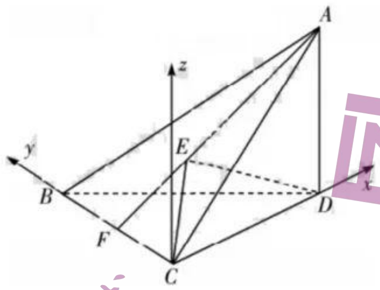
所以 $AD\perp BC$. ……………………………………………………………………… (4 分)

又 $BC\perp AC$，$AC\cap AD=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 ACD. ………………………………………………………………… (5 分)

（Ⅱ）因为 $BC\perp$ 平面 ACD，所以 $BC\perp CD$，所以 $BC=\sqrt{3}$.

以 C 为坐标原点，直线 CD，CB 分别为 x，y 轴，过点 C 且垂直于平面 BCD 的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，……………………………………………………………………… (6 分)



则 $C(0,0,0)$，$D(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$A(\sqrt{3},0,\sqrt{2})$，$F\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

则 $\overrightarrow{CD}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$. ……………………………………… (7 分)

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=\sqrt{3}x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{\sqrt{2}}{3}z=0,\end{cases}$ 取 $y=\sqrt{2}$，则 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{3})$. ……………… (9 分)

同理可得平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$. ……………………………………… (10 分)

设平面 CDE 与平面 ABD 的夹角为 θ，

— 2 —

则 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………… (12 分)

21. **解析** （Ⅰ）双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=m(m>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$, …………………… (2 分)

不妨设点 A 在 x 轴上方，则 A,B 两点的坐标分别为 $(m,\sqrt{3}m)$ 和 $(m,-\sqrt{3}m)$, ……………… (3 分)

所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}m\times2\sqrt{3}m=\sqrt{3}$, ……………………………………………… (4 分)

解得 $m=1$. ……………………………………………………………………………… (5 分)

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，则 F 的坐标为 $(2,0)$,

设 l 与 x 轴交于点 $(p,0)$，则 l 的方程为 $y=k(x-p)(k\neq0)$, ……………………………… (6 分)

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $M'(x_1,-y_1)$.

联立 $\begin{cases}y=k(x-p),\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2+2pk^2x-(k^2p^2+3)=0$, …………………… (7 分)

由题可知 $3-k^2\neq0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{2pk^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\dfrac{k^2p^2+3}{k^2-3}$. ……………………… (8 分)

因为 M',F,N 三点共线，所以 $k_{M'F}=k_{FN}$, ……………………………………………… (9 分)

即 $\dfrac{-y_1}{x_1-2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，即 $-y_1(x_2-2)=y_2(x_1-2)$,

所以 $-k(x_1-p)(x_2-2)=k(x_2-p)(x_1-2)$.

因为 $k\neq0$，所以 $(x_1-p)(x_2-2)+(x_2-p)(x_1-2)=0$,

所以 $2x_1x_2-(p+2)(x_1+x_2)+4p=0$, ……………………………………………… (10 分)

所以 $2\cdot\dfrac{k^2p^2+3}{k^2-3}-(p+2)\cdot\dfrac{2pk^2}{k^2-3}+4p=0$，化简得 $p=\dfrac{1}{2}$. ………………… (11 分)

所以直线 l 经过 x 轴上的定点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. ……………………………………… (12 分)

22. **解析** （Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1-x^2=\dfrac{-x(x^2+x+1)}{x+1}$，$x>-1$. …………………………… (1 分)

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$, ……………………………………………………………… (2 分)

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$, ……………………………… (3 分)

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$. …………………………… (4 分)

（Ⅱ）令 $h(x)=f(x)-ax^2=\ln(x+1)-x-ax^2-\dfrac{x^3}{3}$，由条件知 $h(x)\leqslant0$.

$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1-2ax-x^2=\dfrac{-x[x^2+(2a+1)x+(2a+1)]}{x+1}$，$x>-1$. …………………… (5 分)

设 $m(x)=x^2+(2a+1)x+(2a+1)$.

若 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $m(x)$ 有一正一负两个零点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<0<x_2$. ………………………… (6 分)

则当 $x\in(0,x_2)$ 时，$m(x)<0$，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，所以当 $x\in(0,x_2)$ 时，$h(x)>h(0)=0$，不符合条件. ……………………………………………………………………… (8 分)

若 $a\geqslant-\dfrac{1}{2}$，因为 $x>-1$，所以 $m(x)=x^2+x+1+2a(x+1)\geqslant x^2+x+1-(x+1)=x^2\geqslant0$,

则当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，…………………………（10 分）

所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$，符合条件. ………………………………………………………（11 分）

综上可得，实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. ……………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。