THUSSAT 中学生标准学术能力测试

中学生标准学术能力测试诊断性测试 2019 年 11 月测试

理科数学（一卷）答案

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	C	B	A	D	D	C	A	B	D	D

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\frac{3}{8}$

14. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

15. $(-\infty,7]$

16. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17．解：$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$ ……………………………………2 分

（1）令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$）得

$$2k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\quad(k\in Z)$$

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$（$k\in Z$） ……………………5 分

（2）由 $f(B)=\sqrt{3}$，得 $\sin(B-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$B-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $B-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore B=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 或 $B=2k\pi+\pi,k\in Z$，

$\because B$是三角形的内角，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$． ……………………………7 分

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\therefore a^2+c^2+ac=9$

$\therefore 2ac+ac\le 9$，即 $ac\le 3$ ……………………………9 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B\le\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$． ……………………………11 分

当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$ 时，ΔABC 面积的最大值是 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$． ……………………………12 分

18.（1）取 PC 的中点 F，连接 DF，EF，

∵ E 是 PB 的中点，

∴ $EF//BC$，且 $BC=2EF$，

又 $AD//BC$，$BC=2AD$

∴ $AD//EF$ 且 $AD=EF$， ……………………………2 分

∴ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形，

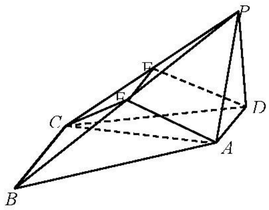
∴ $AE//DF$，又 $DF\subset$平面 PDC, $AE\not\subset$ 平面PCD ， ……………………………4 分

∴ $AE//$平面 PDC． ……………………………5 分

（2）若 $PD=DC$，则$\triangle PDC$ 是等腰三角形，

∴ $DF\perp PC$，

又 $AE//DF$，∴ $AE\perp PC$



∵ $PD\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$

∴ $PD\perp BC$，

又 $BC\perp CD, CD\cap PD=D$

∴ $BC\perp$平面 PDC， ……………………………7 分

∵ $DF\subset$平面 PDC

∴ $BC\perp DF$

∴ $BC\perp AE$

又 $AE\perp PC$ ，$PC\cap BC=C$

∴ $AE\perp$平面 PBC， ……………………………9 分

连接 EC，AC，则$\angle ACE$ 就是直线 AC 与平面 PBC 所成的角． ……………………………10 分

设 $PD=CD=BC=2$，

在 $Rt\triangle PCB$ 中，求得 $PC=2\sqrt{2}$ ，$PB=2\sqrt{3}$ ，$EC=\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle ADC$ 中，求得 $AC=\sqrt{5}$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AEC$ 中，$\cos\angle ECA=\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………12 分

19.（1）设事件 A_i 为“甲盒中取出 i 个红球”，事件 B_j 为“乙盒中取出 j 个红球”

则 $P(A_i)=\dfrac{C_2^iC_3^{2-i}}{C_5^2},P(B_j)=\dfrac{C_3^jC_3^{2-j}}{C_6^2}$

设事件 C 为“4 个球中恰有 1 个红球”

$\therefore P(C)=P(A_0B_1)+P(A_1B_0)=\dfrac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}+\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{9}{15}+\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{3}{15}=\dfrac{3}{10}$ …

………………………………3 分

（2）ξ 可取的值为 $0,1,2,3,4$

$\therefore P(\xi=0)=P(A_0B_0)=\dfrac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{50}$ ……5 分

$P(\xi=1)=P(C)=\dfrac{3}{10}$

$P(\xi=2)=P(A_0B_2)+P(A_1B_1)+P(A_2B_0)=\dfrac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}+\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}+\dfrac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{11}{25}$

………………………………7 分

$P(\xi=3)=P(A_1B_2)+P(A_2B_1)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}+\dfrac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{9}{50}$ …………………9 分

$\therefore P(\xi=4)=P(A_2B_2)=\dfrac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\dfrac{1}{50}$ ………………………………10 分

$\therefore\xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{3}{50}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$

$\therefore E\xi=0\times\dfrac{3}{50}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{11}{25}+3\times\dfrac{9}{50}+4\times\dfrac{1}{50}=\dfrac{9}{5}$ ………………………………12分

20.（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$ ，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2},y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，……1 分

$\therefore\ k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{y_0}$ ， ……………………………………3 分

而 $k_{MP}=\dfrac{y_0}{x_0-4}$， ……………………………………4 分

由 $k\cdot k_{MP}=-1$ 得 $x_0-4=-2$ ，即 $x_0=2$． ……………………………………5 分

（2）设直线 $AB:x=m(y-y_0)+2$ 即 $AB:x=my-my_0+2$ ，

与抛物线 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my+4my_0-8=0$ ，

$\because\triangle=16m^2-4(4my_0-8)>0,\therefore m^2<2$

则 $y_1+y_2=4m,y_1y_2=4my_0-8$， ……………………………………7 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{16m^2-16my_0+32}$ ，

而 P 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|my_0+2|}{\sqrt{m^2+1}}$，

所以 $S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}d\,|AB|=2|my_0+2|\sqrt{m^2-my_0+2}$ ……………………………………9 分

又由于 $m=\dfrac{1}{k}=\dfrac{y_0}{2}$，

所以 $S_{\Delta PAB}=2(2m^2+2)\sqrt{2-m^2}=4(m^2+1)\sqrt{2-m^2}$ （$m^2<2$）， ……………………10 分

令 $\sqrt{2-m^2}=t$，则 $t>0$ 且 $m^2=2-t^2$，

所以 $S_{\Delta PAB}=4(3-t^2)t=12t-4t^3$ ，

令 $g(t)=12t-4t^3(t>0)$ ，

则 $g'(t)=12-12t^2=12(1-t)(1+t)$，

当 $0<t<1$ ， $g'(t)>0$ ，当 $t>1$ 时， $g'(t)<0$，

故 $g(t)=12t-4t^3\le g(1)=8$，即 ΔPAB 面积的最大值为 8． ……………………………12 分

21.（1）解：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0,\therefore x=e$

当 $f'(x)>0$时,$0<x<e,\therefore f(x)$在（0，e)上单调递增 ，

当 $f'(x)<0$时，$x>e,\therefore f(x)$在（$e,+\infty$)上单调递减.

$\therefore f(x)_{极大值}=f(e)=\dfrac{1}{e}-a$ ……3 分，

$\because f(x)$有且只有两个零点,$\therefore 0<a<\dfrac{1}{e}$，又$x>0$且$x\to 0$时$f(x)<0$，

$x\to +\infty$时，若$a=0$时，$f(x)>0$不符合题意，若$a<0$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a>0$不符合，

若$a>0$时,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$满足，

综上，若使 $f(x)$ 有且只有两个零点，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{e}$ …………………… 4 分

（2）证法一：

$\because f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a=0,\therefore \ln x=ax,\therefore \ln x=a\cdot e^{\ln x}$，$\therefore \ln x_1,\ln x_2$是$xe^{-x}=a$的两根

设$t_1=\ln x_1,t_2=\ln x_2,g(t)=t\cdot e^{-t},g'(t)=(1-t)e^{-t}$,

$\therefore g(t)$在（-∞,1]上单调递增，在$[1,+\infty)$上单调递减, ………………………………6 分

$\because g(t_1)=g(t_2)$,设$t_1<t_2$,则必有$0<t_1<1<t_2$,

构造函数$G(t)=g(1+t)-g(1-t),t\in(0,1)$,

$\because G'(t)=g'(1+t)+g'(1-t)=\dfrac{t}{e^{t+1}}(e^{2t}-1)>0,$

$\therefore G(t)$在$t\in(0,1)$上单调递增,$\therefore G(t)>G(0)=0,$ ………………………………9 分

$\therefore g(2-t_1)>g(t_1)=g(t_2)$,

又$\because 2-t_1,t_2\in(1,+\infty),g(t)$在$t\in(1,+\infty)$上单调递减,

$\therefore 2-t_1<t_2,\therefore t_1+t_2>2$,

$\therefore \ln x_1+\ln x_2>2$，即 $x_1\cdot x_2>e^2$；$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1\cdot x_2}>e$，即 $x_1+x_2>2e$. ……12 分

证法二：

不妨设$1<x_1<e<x_2$，

$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore \dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，即$\therefore \dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}$，　　……………………………6 分

设 $x_2=tx_1(t>1)$，$\therefore t=\dfrac{\ln tx_1}{\ln x_1}=\dfrac{\ln t+\ln x_1}{\ln x_1}$，$\therefore \ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$，

$\because \ln x_2=\ln(tx_1)=\ln t+\ln x_1=\ln t+\dfrac{\ln t}{t-1}=\dfrac{t\ln t}{t-1}$，$\therefore \ln x_1+\ln x_2=\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t$，

$\because \dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1\cdot x_2}$，要证 $x_1+x_2>2e$，只需证 $x_1\cdot x_2>e^2$，

即证 $\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t>2$，即证 $\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$．　……………………………9 分

设 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$(t>1)$，

$\because g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增．

$\because g(1)=0$，$\therefore g(t)>g(1)=0$，

$\therefore \ln x_1+\ln x_2>2$，$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1\cdot x_2}>e$，即 $x_1+x_2>2e$．　…………………………12 分

证法三：

不妨设 $1<x_1<e<x_2$，

$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore \dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，　　……………………………6 分

要证 $x_1+x_2>2e$，只需证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\dfrac{x_1}{\ln x_1}>e$，　……………………7 分

变形，得：$\ln x_2-\ln x_1>\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}$，即 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$．

设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$ $\therefore \ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，设 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1},(t>1)$，　…………………10 分

$\because g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore g(t)$在（$1,+\infty$）上单调递增，

$\therefore g(t)>g(1)=0$，$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_1}{\ln x_1}=e$成立，$\therefore x_1+x_2>2e$．　…………………………12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22.【选修 4-4：坐标系与参数方程】（10 分）

（1）因为直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=9$ ，

即 $2\rho\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)=9$．由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

可得直线 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+9=0$．　　　　……………………………2 分

将曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=4\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ ，消去参数 a，

得曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$．　　　　……………………………4 分

（2）设 $Q(4\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ ，$\alpha\in[0,2\pi)$ ．

点 P 的极坐标 $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ ，化为直角坐标为 $\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ．

则 $M\left(2\cos\alpha+1, \sin\alpha+\sqrt{3}\right)$．　　　　……………………………6 分

所以点 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{\left|2\cos\alpha+1-\sqrt{3}\left(\sin\alpha+\sqrt{3}\right)+9\right|}{2}=\frac{\left|\sqrt{7}\sin(\theta-\alpha)+7\right|}{2}$ ，（其中，$\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ），所以 $d\in\left[\frac{7-\sqrt{7}}{2},\frac{7+\sqrt{7}}{2}\right]$　　　　……………………………8 分

$\because |AB|=4$ ，$\therefore S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2d\in\left[7-\sqrt{7},7+\sqrt{7}\right]$

$\therefore$ $\triangle MAB$ 面积的最大值为 $7+\sqrt{7}$，最小值为 $7-\sqrt{7}$　　　　……………………………10 分

23.【选修 4-5：不等式选讲】（10 分）

23.（1）因为 a,b,c 为正实数，且满足 $a+b+c=3$．所以，

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$\because a^2+b^2\ge 2ab, b^2+c^2\ge 2bc, a^2+c^2\ge 2ac$，$\therefore a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$ ……2 分

$\therefore (a+b+c)^2\ge 3ab+3ac+3bc$ ，$\because a+b+c=3$，$\therefore ab+bc+ac\le 3$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立 ……5 分

（2）$\because \dfrac{a^2}{b}+b\ge 2a, \dfrac{b^2}{c}+c\ge 2b, \dfrac{c^2}{a}+a\ge 2c$ ，

$\therefore \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+a+b+c\ge 2(a+b+c)$ ……8 分

$\therefore \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c$ ，$\because a+b+c=3$ ，$\therefore \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge 3$ ，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立 ……10 分