2022—2023 学年高三考前定位考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid\sqrt{x}\geqslant 1\}$，$B=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,2]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[-2,+\infty)$

2. 若复数 $z=\dfrac{m+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于第二象限，则实数 m 的取值范围是

A. $(-2,2)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, 0<x<1,\\ 4^{x-2}, x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(f(1))=$

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

4. 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，然后横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=\sin x$ 的图象，则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为

A. $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

5. 已知 $\left(ax-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中的常数项是 672，则 $a=$

A. 3^9　　B. 2^9　　C. 2　　D. 1

6. 已知等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$AB=2DC=2AD=2$，BC 的中点为 E，则 $\overrightarrow{AE}=$

A. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$　　C. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D. $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB=4$，$AC=4$，$BC=4\sqrt{2}$，$PA=6$，D 为 PB 的中点，则异面直线 AD 与 PC 所成角的余弦值为

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$　　B. $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$　　C. $\dfrac{5}{14}$　　D. $\dfrac{9}{13}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-a\mathrm{e}^x, x<a,\\ -(x-2)^2, x\geqslant a\end{cases}$ 的最大值为 0，则实数 a 的取值范围为

A. $[0,2]$　　B. $[0,1]$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $[0,2)$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\sin A=\sin B\cos C$ 且 $c=2\sqrt{3}$，$A=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\dfrac{c+a}{\sin C+\sin A}=$

A. $8\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 8　　D. 4

10. 2022 年卡塔尔世界杯上，32 支球队分成 8 个小组，每个小组的前两名才能出线，晋级到 1/8 决赛. 某参赛队在开赛前预测：本队获得小组第一的概率为 0.6，获得小组第二的概率为 0.3；若获得小组第一，则 1/8 决赛获胜的概率为 0.9，若获得小组第二，则 1/8 决赛获胜的概率为 0.3. 那么在已知该队小组出线的条件下，其 1/8 决赛获胜的概率为

A. 0.54　　B. 0.63　　C. 0.7　　D. 0.9

11. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 是 C 上异于原点 O 的任意一点，线段 PF 的中点为 M，则以 F 为圆心且与直线 OM 相切的圆的面积最大值为

A. π　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

12. 已知函数 $f(x)=x^3-x+a$ 的图象关于原点对称，则与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2+\dfrac{1}{4}$ 均相切的直线 l 有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 十九世纪初，我国数学家董祐诚在研究椭圆求周长时曾说：“椭圆求周旧无其术，秀水朱先生鸿为言圆柱斜剖成椭圆，是可以勾股形求之.” 也就是说可以通过斜截圆柱法得到椭圆. 若用一个与圆柱底面成 60° 的平面截该圆柱，则截得的椭圆的离心率为__________.

14. 若 $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos\alpha=\dfrac{5}{2}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)=$__________.

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)-ax}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则实数 $a=$__________.

16. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=3$，点 P 为侧棱 DD_1 上一点，过 A，C 两点作垂直于 BP 的截面，以此截面为底面，以 B 为顶点作棱锥，则该棱锥的外接球的表面积的取值范围是__________.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤. 第 17 ~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

在等比数列$\{a_n\}$中,$a_7=8a_4$,且$\frac{1}{2}a_2,a_3-4,a_4-12$成等差数列.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设$b_n=(-1)^n\log_2 a_n$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,求满足$|T_k|=20$的 k 的值.

18. (12 分)

小王去自动取款机取款,发现自己忘记了 6 位密码的最后一位数字,他决定从 0 ~9 中不重复地随机选择 1 个进行尝试,直到输对密码,或者输错三次银行卡被锁定为止.

(Ⅰ)求小王的该银行卡被锁定的概率;

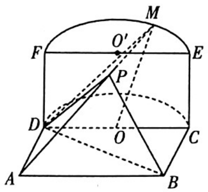
(Ⅱ)设小王尝试输入该银行卡密码的次数为 X,求 X 的分布列、数学期望及方差.

19. (12 分)

如图,矩形 $ABCD$ 与半圆柱 $O'O$ 相接,半圆柱的轴截面 $DCEF\perp$平面 $ABCD$,线段 DC 的中点为 O,M 是$\overset{\frown}{EF}$上一点,$AD=1,AB=2,OM$ 与底面 $ABCD$ 所成的角为$\frac{\pi}{4}$.

(Ⅰ)在线段 AM 上有一点 P 满足 $AP=2PM$,证明:$MO//$平面 PBD;

(Ⅱ)若$\overset{\frown}{FM}=2\overset{\frown}{ME}$,求平面 AMD 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值.



20. (12 分)

已知函数$f(x)=(x-1)e^x-ax^2$.

(Ⅰ)当$a=\frac{e^2}{2}$时,求$f(x)$的极值;

(Ⅱ)若关于 x 的不等式$f(x)+(2-x)e^x\geq(2-a)x+a$ 在$[0,+\infty)$上恒成立,求实数 a 的取值范围.

21. (12 分)

设双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$,且 E 的渐近线方程为$y=\pm\frac{x}{2}$.

(Ⅰ)求 E 的方程;

(Ⅱ)过 F_2 作两条相互垂直的直线 l_1 和 l_2,与 E 的右支分别交于 A,C 两点和 B,D 两点,求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4 -4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),直线 l 过点 $M(1,0)$,且倾斜角为 α.

(Ⅰ)若 l 经过 C 上纵坐标最大的点,求 l 的参数方程;

(Ⅱ)若 l 与 C 交于 A,B 两点,且$||MA|-|MB||=\frac{2}{5}$,求 $\cos\alpha$ 的值.

23. [选修 4 -5:不等式选讲](10 分)

已知函数$f(x)=|x-1|+|x-2|$.

(Ⅰ)求不等式$f(x)<x$ 的解集;

(Ⅱ)已知 a,b 为正实数,证明:关于 x 的不等式$f(x)\geq\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}$的解集为 $\mathbf{R}$.