2023届六校第三次联考
数学试题

命题人：广州二中曾小鸿　审题人：广州二中李志军、陈景文

满分：150分。考试时间：120分钟。

注意事项：1.答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。并用2B铅笔将对应的信息点涂黑，不按要求填涂的，答卷无效。

2.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，只需将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集为R，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}+1\geq 0\right.\right\}$，则$\complement_R B=$

A. $\{x|-1<x<0\}$　　B. $\{x|-1\leq x<0\}$

C. $\{x|-1<x\leq 0\}$　　D. $\{x|-1\leq x\leq 0\}$

2. 若复数$z\cdot(1-i)=2i$，则$|z|=$

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 某学校要求学生居家学习期间要坚持体育锻炼，为了解学生体育锻炼的情况，学校随机抽取了部分学生，对他们一天内的体育锻炼时长进行了统计，统计数据如下表所示：

锻炼时长（分钟）	30	40	50	60	80
学生人数	6	10	9	8	7

可以估计该学校学生一天内体育锻炼时长的众数及第40百分位数分别是

A. 40，45　　B. 40，40　　C. 50，40　　D. 40，50

4. 已知实数$a=\log_2 3, b=\cos\frac{\pi}{4}, c=\log_3 2$，则这三个数的大小关系正确的是

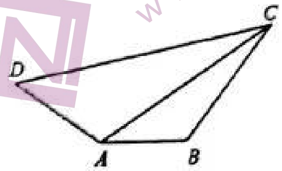
A. $a>b>c$　　　　B. $b>a>c$

C. $b>c>a$　　　　D. $a>c>b$

5. 在平面四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\frac{5\pi}{6}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$AB=\sqrt{3}$，$AD=2$，$AC=4$.。若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda+\mu=$

A. 2　　　　B. $2\sqrt{3}$

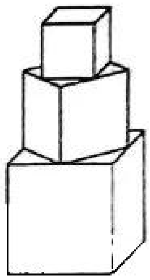
C. 4　　　　D. 6



6. 有一塔形几何体由若干个正方体构成，构成方式如图所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点。已知最底层正方体的棱长为2，且该塔形的表面积（不含最底层正方体的底面面积）超过34，则该塔形中正方体的个数至少是

A. 4　　　　B. 5

C. 6　　　　D. 7



7. 已知圆$C:(x-3)^2+(y-3)^2=2$和两点$A(m,0)$，$B(0,m)$，若圆C上存在点P，使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则实数$m$的取值范围为

A. $[3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}]$　　　　B. $[2\sqrt{2},4\sqrt{2}]$

C. $[-4,-2]$　　　　D. $[2,4]$

8. 已知$a>1$，x_1,x_2,x_3为函数$f(x)=a^x-x^2$的零点，其中$x_1<x_2<x_3$，若$x_1+x_3=2x_2$，则

A. $\frac{x_3}{x_2}<2\ln a$　　　　B. $\frac{x_3}{x_2}=2\ln a$

C. $\frac{x_3}{x_2}>2\ln a$　　　　D. $\frac{x_3}{x_2}$与$2\ln a$大小关系不确定

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

9．已知随机事件A，B发生的概率分别为$P(A)=0.3,P(B)=0.6$，下列说法正确的有

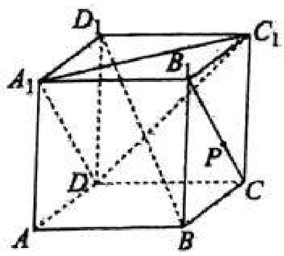
A．若$P(AB)=0.18$，则A，B相互独立

B．若A，B相互独立，则$P(B|A)=0.6$

C．若$P(B|A)=0.4$，则$P(AB)=0.12$

D．若$A\subseteq B$，则$P(A|B)=0.3$

10．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P在线段B_1C上运动，则下列结论中正确的有



A．直线$BD_1\perp$平面A_1C_1D

B．直线AP∥平面A_1C_1D

C．异面直线AP与A_1D所成角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

D．三棱锥A_1-PC_1D的体积为定值

11．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$（$\omega>0$）在区间$[0,\pi]$上有且仅有4条对称轴，给出下列四个结论，正确的有

A．$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有3个不同的零点

B．$f(x)$的最小正周期可能是$\frac{\pi}{2}$

C．ω的取值范围是$\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$

D．$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$上单调递增

12．若函数$f(x)=\ln x+a(x^2-2x+1)(a\in R)$存在两个极值点$x_1,x_2\ (x_1<x_2)$，则

A．函数$f(x)$至少有一个零点

B．$a<0$或$a>2$

C．$0<x_1<\frac{1}{2}$

D．$f(x_1)+f(x_2)>1-2\ln 2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$\left(x-\frac{a}{x}\right)^6$的展开式中含$x^2$项的系数为 60，则实数$a=$______.

14. 设计一个圆锥形包装盒，能把一个半径为 1 的小球完全装入这个盒子（底面密封），那么这种圆锥形盒子的体积的最小值是______.

15. 函数$f(x)$在 R 上单调递减，且$f(2+x)+f(2-x)=0$，对于任意的$A\in[0,\pi]$，均有$f(m+3\sin A)+f\left(4-\sqrt{3}\cos A\right)\geq 0$恒成立，则实数$m$的最大值为______.

16. 黎曼猜想由数学家波恩哈德·黎曼于 1859 年提出，是至今仍未解决的世界难题．黎曼猜想研究的对象是类似于$\xi(n)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$的无穷级数，我们经常从无穷级数的部分和$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}$入手．请你回答以下问题：

（1）$\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}\right]=$______．（其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，如$[-3.5]=-4,[2]=2.$）

（2）已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，则$\left[\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2023}}\right]=$______.

（第 1 空 2 分，第 2 空 3 分。）

四、解答题：本题共6小题，第17题10分，18—22题各12分，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．**（本小题满分10分）**

某研究性学习小组对某植物种子的发芽率 y 与环境平均温度 x（℃）之间的关系进行研究，他们经过5次独立实验，得到如下统计数据：

第 n 次	1	2	3	4	5
环境平均温度 x（℃）	18	19	20	21	22
种子发芽率 y	62%	69%	71%	72%	76%

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$．

（1）若从这5次实验中任意抽取2次，设种子发芽率超过70%的次数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列与数学期望；

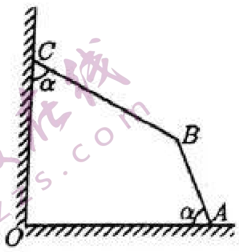
（2）根据散点图可以发现，变量 y 与 x 之间呈线性相关关系．如果在第6次实验时将环境平均温度仍然控制在21℃，根据回归方程估计这次实验中该植物种子的发芽率．

18．**（本小题满分12分）**

某公园要建造如图所示的绿地 $OABC$，OA,OC 为互相垂直的墙体，已有材料可建成的围栏 AB 与 BC 的总长度为12米且 $\angle BAO=\angle BCO$．设 $\angle BAO=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

（1）当 $AB=3$ 米，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求 OB 的长；

（2）当 $AB=6$ 米时，求 $OABC$ 面积S的最大值及此时 α 的值．



19.（本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-2n+2(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$的前n项和T_n满足关系式$T_n=1-b_n(n\in N^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

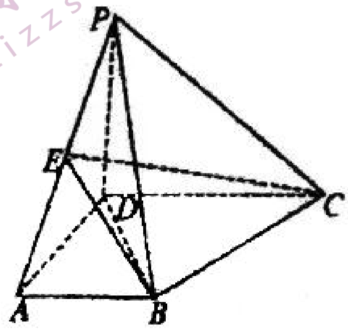
（2）设数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和为R_n，求证：$\frac{1}{2}\le R_n<2$.

20.（本小题满分12分）

如图，四棱锥P-$ABCD$的底面为梯形，$PD\perp$底面$ABCD$，$\angle BAD=\angle CDA=90°$，$AD=AB=1$，$CD=2$，$E$为$PA$的中点.

（1）证明：平面$PBD\perp$平面BCE；

（2）若二面角P-BC-E的余弦值为$\frac{2\sqrt{6}}{5}$，求三棱锥P-BCE的体积.



21.（本小题满分12分）

已知椭圆C的焦点坐标为$F_1(-1,0)$和$F_2(1,0)$，且椭圆经过点$G\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若$T(1,1)$，椭圆C上四点M，N，P，Q满足$\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$，$\overrightarrow{NT}=3\overrightarrow{TP}$，求直线$MN$的斜率.

22.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=e^x-a\sin x-1(a>0)$在区间$(0,\pi)$内有唯一极值点x_1.

（1）求实数a的取值范围；

（2）证明：$f(x)$在区间$(0,\pi)$内有唯一零点x_2，且$x_2<2x_1$.

2023届六校第三次联考

数学答案及评分标准

一、选择题（每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	A	D	B	D	C

8．C【解析】在同一坐标系作出 $y=a^x(a>1)$ 和 $y=x^2$ 的简图，可知 $x_1<0<x_2<x_3$，

$a^x=x^2 \Leftrightarrow \ln a=\dfrac{2\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个根，令 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$，在 $(0,e)$ 上，

$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；在 $(e,+\infty)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减．$x\to 0, g(x)\to -\infty$；$x\to +\infty, g(x)\to 0$，且

$g(x)>0$．所以 $0<\ln a<\dfrac{2}{e}$，$1<a<e^{\frac{2}{e}}$；若 $2x_2=x_1+x_3$，由 $\begin{cases}a^{x_1}=x_1^2\\ a^{x_2}=x_2^2\\ a^{x_3}=x_3^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2\log_a(-x_1)\\ x_2=2\log_a x_2\\ x_3=2\log_a x_3\end{cases}$，所以

$4\log_a x_2=2\log_a(-x_1)+2\log_a x_3$，$x_2^2=-x_1x_3$，即 $x_3^2-2x_2x_3-x_2^2=0$，

又由 $0<x_2<x_3$，可解得 $\dfrac{x_3}{x_2}=\sqrt{2}+1$．所以 $2\ln a<\dfrac{4}{e}<2<\sqrt{2}+1=\dfrac{x_3}{x_2}$．

二、多选择题（每小题5分，共20分）

题号	9	10	11	12
答案	ABC	ABD	BC	ACD

12．ACD【详解】对于A，$f(x)=\ln x+a\left(x^2-2x+1\right)=\ln x+a(x-1)^2$

$f(1)=\ln 1+a(1-1)^2=0$，$\therefore x=1$ 是 $f(x)$ 的一个零点，故A正确

对于B，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+a(2x-2)=\dfrac{2ax^2-2ax+1}{x}$ $\because f(x)$ 存在两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$\therefore 2ax^2-2ax+1=0$ 有两个不相等的实数根，即 $f'(x)$ 有两个变号零点 $x_1>0,x_2>0$

$\therefore \Delta>0$，即 $(-2a)^2-4\times 2a\times 1=4a^2-8a=4a(a-2)>0$，$\therefore a>2$ 或 $a<0$

又 $x_1>0,x_2>0$，$\therefore \begin{cases}x_1+x_2=1>0\\ x_1x_2=\dfrac{1}{2a}>0\end{cases}$，解得 $a>0$，综上，$a>2$，故B错误

对于C，由B选项可得，$x_1+x_2=1$，$\therefore x_2=1-x_1$，$\therefore 1-x_1>x_1$，$\therefore 0<x_1<\frac{1}{2}$，故C正确

对于D，$f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1+a(x_1^2-2x_1+1)+\ln x_2+a(x_2^2-2x_2+1)=\ln x_1x_2+a[x_1^2+x_2^2-2(x_1+x_2)+2]$

将$x_1+x_2=1, x_1x_2=\frac{1}{2a}$代入上式$f(x_1)+f(x_2)=\ln\frac{1}{2a}+a(1^2-2\times\frac{1}{2a}-2\times1+2)=-\ln 2a+a(1-\frac{1}{a})$

$=-\ln 2-\ln a+a-1=a-\ln a-\ln 2-1$

令$h(a)=a-\ln a-\ln 2-1(a>2)$，$h'(a)=1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}>0$ 有$h(a)$在$(2,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(a)>h(2)=2-\ln 2-\ln 2-1=1-2\ln 2$，故D正确，故选：ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．±2　14．$\frac{8\pi}{3}$　15．$-2\sqrt{3}$　16．(1) 1（2分）；(2) 88（3分）．

16题【解析】(1) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}>1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=1\frac{9}{22}$，

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}<1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=1\frac{9}{10}$，$\therefore\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}\right]=1$.

(2) 由题意可得，$S_n>0$，当$n\geqslant2$时，$S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}})$，化简得$S_n^2-S_{n-1}^2=1$，

又当$n=1$时，$S_1^1=a_1^1=1$，$\therefore$数列$\{S_n^2\}$是首项、公差均为1的等差数列，

$\therefore S_n^2=1+(n-1)\times1=n$，即$S_n=\sqrt{n}$，当$n\geqslant2$时，

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2S_n}=\frac{1}{S_n}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ ①，

设$S=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2023}}$，由①可得，$S>1+2\times[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2024}-\sqrt{2023})]=$

$1+2\times\left(\sqrt{2024}-\sqrt{2}\right)$，$\left(\sqrt{2024}-\sqrt{2}\right)^2=2026-4\sqrt{1012}>2026-4\sqrt{1024}=2026-4\times32=1898$

$43.5^2=1892.25$，$\therefore\left(\sqrt{2024}-\sqrt{2}\right)^2>1898>1892.25=43.5^2$，$\therefore\sqrt{2024}-\sqrt{2}>43.5$，

$\therefore 1+2\times\left(\sqrt{2024}-\sqrt{2}\right)>1+2\times43.5=88$且$S<1+2\times[(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})]$

$=1+2\times(\sqrt{2023}-1)=2\sqrt{2023}-1$，$\because 45^2=2025$，$\therefore 2\sqrt{2023}-1<2\sqrt{2025}-1=2\times45-1=89$．

$\therefore\left[\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2023}}\right]=88$．

四、17．【解析】(1) 由题可知ξ的可能取值为0，1，2，--------------------------------1分

则 $P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，------------------------------2 分

$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}$，------------------------------3 分

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，------------------------------4 分

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

即 $E(\xi)=1.2$；------------------------------5 分

(2) 由己知得 $\bar{x}=\frac{18+19+20+21+22}{5}=20$，------------------------------6 分

$\bar{y}=\frac{0.62+0.69+0.71+0.72+0.76}{5}=0.7$，------------------------------7 分

所以 $\hat{b}=\frac{(-2)\times(-0.08)+(-1)\times(-0.01)+0\times0.01+1\times0.02+2\times0.06}{4+1+0+1+4}=0.031$，

$\hat{a}=0.7-0.031\times20=0.08$，即 $\hat{y}=0.08+0.031x$，------------------------------9 分

当第 6 次实验，即 $x=21$ 时，$\hat{y}=0.08+0.031\times21=0.731$，

所以根据回归方程估计这次实验中该种子的发芽率为 73.1%．------------------------------10 分

18．【解析】：(1) $AB=3,BC=9$，在 ΔBOC 中，$\frac{OB}{\sin\alpha}=\frac{9}{\sin\angle BOC}$；------------------------------1 分

在 ΔBOA 中，$\frac{OB}{\sin\alpha}=\frac{3}{\sin\angle BOA}$．------------------------------2 分

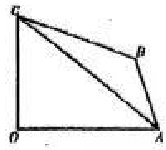
又 $\angle BOC+\angle BOA=\frac{\pi}{2}$，从而 $OB^2=OB^2(\sin\angle BOC)^2+OB^2(\sin\angle BOA)^2$

$$=81\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=90\sin^2\alpha$$

$\alpha=\frac{\pi}{3}$，故 $OB=\frac{3\sqrt{30}}{2}$（米）．------------------------------5 分

（2）由题意，$AB=BC=6,\angle ACB=\angle CAB,\angle ABC=2\pi-2\alpha-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-2\alpha$ -6 分

所以$\angle OAC=\angle OCA=\frac{\pi}{4}$. -----7 分



在ΔABC中，由余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=72-72\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=72+72\sin2\alpha$

--8 分

所以$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{4}AC^2=18+18\sin2\alpha$，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times6\times6\times\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=-18\cos2\alpha$

--9 分

于是$S=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta AOC}=-18\cos2\alpha+18+18\sin2\alpha=18\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+18,0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

--11 分

当$2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{3\pi}{8}$时，S取到最大值，最大值为$18\sqrt{2}+18$.

因此，当$\alpha=\frac{3\pi}{8}$时，绿地$OABC$最大的面积为$18\sqrt{2}+18$平方米 .

--12 分

19．【解析】：(1) $a_1=S_1=1$， --1 分

$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-2n+2-(n-1)^2+2(n-1)-2=2n-3$.

$\therefore a_n=\begin{cases}1\ (n=1)\\2n-3\ (n\geq2,n\in N^*)\end{cases}$ --2 分

$n=1$时，$b_1=T_1=1-b_1$，$b_1=\frac{1}{2}$，

$n\geq2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=b_{n-1}-b_n$，$b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$， --4 分

$\therefore\{b_n\}$为等比数列，公比是$\frac{1}{2}$，$b_1=\frac{1}{2}$

$\therefore b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(n\in N^*)$ --6 分

(2) $n=1$时，$R_n=a_1b_1=\frac{1}{2}$ --7 分

$n\geq2$时，$R_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\frac{1}{2}R_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$ ------------------------8分

两式相减，得：$\frac{1}{2}R_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=1-(2n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$ ------------------------10分

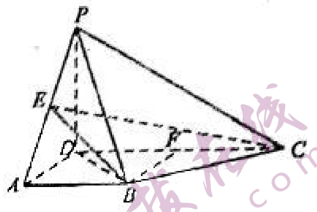
$$R_n=2-(2n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由于 $a_nb_n>0$ 故 $\{R_n\}$ 递增，且 $(2n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n>0$，综上，故 $\frac{1}{2}\le R_n<2$． --------12分

20．【解析】(1)因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 面 $ABCD$，则 $PD\perp BC$， ----------------1分

由 $\angle BAD=90^\circ$，$AD=AB=1$，则 $BD=\sqrt{2}$，又 $\angle CDA=90^\circ$，则 $AB//DC$，

----------------------------2分



设 F 为 CD 中点，连接 BF，易知：$ABFD$ 为正方形，则 $BF=1$，又 $CD=2$，

即 $FC=1$，所以 $BC=\sqrt{2}$，

综上，$BC^2+BD^2=CD^2$，即 $BD\perp BC$，

------------------------3分又 $BD\cap PD=D$，则 $BC\perp$ 面 PBD，

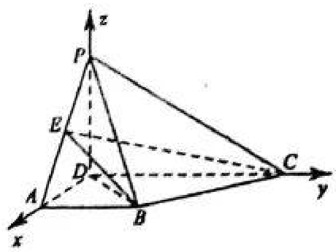
又 $BC\subset$ 面 BCE，

所以平面 $PBD\perp$ 平面 BCE． --4分

(2)以 DA,DC,DP 为 x,y,z 轴建立坐标系如图，设 $PD=m$，

则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$E(\frac{1}{2},0,\frac{m}{2})$，$P(0,0,m)$． --5分

所以 $\overrightarrow{PB}=(1,1,-m)$，$\overrightarrow{EB}=(\frac{1}{2},1,-\frac{m}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，



若 $\vec{\alpha}=(x,y,z)$ 为面 PBC 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+y=0\\ \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{PB}=x+y-zm=0\end{cases}$，令

$x=1$，则 $\vec{\alpha}=(1,1,\frac{2}{m})$， ----------------------------7分

若 $\vec{\beta}=(a,b,c)$ 为面 EBC 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{BC}=-a+b=0\\ \vec{\beta}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{a}{2}+b-\frac{cm}{2}=0\end{cases}$，

令 $a=1$，则 $\vec{\beta}=(1,1,\frac{3}{m})$，所以 $|\cos<\vec{\alpha},\vec{\beta}>|=|\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}|=\frac{2+\frac{6}{m^2}}{\sqrt{2+\frac{4}{m^2}}\cdot\sqrt{2+\frac{9}{m^2}}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，整理得 $\frac{9}{m^4}-\frac{6}{m^2}+1=0$，

所以 $m=\sqrt{3}$，即 $PD=\sqrt{3}$， ------------------------------------8 分

易得：$PA=2, PC=\sqrt{7}$，在直角 $\triangle PDB$ 中，$PB=\sqrt{5}$，所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ ------------------9 分

由上有：$\overrightarrow{EB}=(\frac{1}{2},1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 且面 PBC 的一个法向量 $\vec{\alpha}=(1,1,\frac{2}{\sqrt{3}})$，

故 E 到面 PBC 的距离 $d=\left|\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right|=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$ ------------11 分

所以 $V_{P-BCE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBC}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{30}}{20}=\frac{\sqrt{3}}{12}$． ----------------------------12 分

21．【解析】．(1) 由题意可知，$c=1$， ----------------------------------1 分

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$，将点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 代入椭圆方程，

得 $\left(a^2-4\right)\left(4a^2-1\right)=0$． --2 分

解得 $a^2=\frac{1}{4}$（舍），$a^2=4$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ----------------------3 分

(2)（解法一）若直线 MQ ⊥ x 轴，联立 $\begin{cases}x=1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，$y=\pm\frac{3}{2}$

得 $\overline{MT}=5\overline{MQ}$，不符合题意． ---4 分

设 $M(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$N(x_3,y_3)$，$P(x_4,y_4)$，$l_{MQ}:y-1=k(x-1)$

由 $\begin{cases}y=kx+1-k\\3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow(3+4k^2)x^2+(8k-8k^2)x+(4k^2-8k-8)=0$

$x_1+x_2=\frac{8k^2-8k}{3+4k^2}$ ①，$x_1x_2=\frac{4k^2-8k-8}{3+4k^2}$ ②， -------------------------6 分

由 $\overline{MT}=3\overline{TQ}$，得 $1-x_1=3(x_2-1)$，$x_1+3x_2=4$ ③

由①③得 $x_2=\frac{4k^2+4k+6}{3+4k^2}$，$x_1=\frac{4k^2-12k-6}{3+4k^2}$，代入② ----------------------8 分

得：$(4k^2-12k-6)(4k^2+4k+6)=(4k^2-8k-8)(3+4k^2)$，即 $7k^2+18k+3=0$

$k_1+k_2=-\frac{18}{7}, k_1k_2=\frac{3}{7}$ --10 分

$$k_{MN}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{(k_2x_3+1-k_2)-(k_1x_1+1-k_1)}{x_3-x_1}=\frac{k_2\cdot\frac{-12k_2-9}{3+4k_2^2}-k_1\cdot\frac{-12k_1-9}{3+4k_1^2}}{\frac{4k_2^2-12k_2-6}{3+4k_2^2}-\frac{4k_1^2-12k_1-6}{3+4k_1^2}}$$

$$=\frac{(4k_2^2+3k_2)(3+4k_1^2)-(4k_1^2+3k_1)(3+4k_2^2)}{(4k_2+3)(3+4k_1^2)-(4k_1+3)(3+4k_2^2)}=\frac{12(k_1+k_2)+9-12k_1k_2}{12-16k_1k_2-12(k_1+k_2)}=-\frac{3}{4}.$$

--12 分

(解法二) 设 $M(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$、$N(x_3,y_3)$、$P(x_4,y_4)$、$T(1,1)$，

因为 $\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$，所以 $\begin{cases}1-x_1=3(x_2-1)\\1-y_1=3(y_2-1)\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_2=\frac{4-x_1}{3}\\y_2=\frac{4-y_1}{3}\end{cases}$，----------------------5 分

又 $M(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 都在椭圆上，

所以 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{1}{4}\left(\frac{4-x_1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4-y_1}{3}\right)^2=1$，----------------------6 分

即 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1 & \cdots\cdots① \\ \frac{1}{4}(4-x_1)^2+\frac{1}{3}(4-y_1)^2=9 & \cdots\cdots②\end{cases}$，----------------------7 分

②-①得 $\frac{1}{4}(4-2x_1)\cdot4+\frac{1}{3}(4-2y_1)\cdot4=8$，

即 $\frac{1}{4}(2-x_1)+\frac{1}{3}(2-y_1)=1\cdots\cdots③$，--8 分

又 $\overrightarrow{NT}=3\overrightarrow{TP}$，同理得 $\frac{1}{4}(2-x_3)+\frac{1}{3}(2-y_3)=1\cdots\cdots④$ ----------------------10 分

④-③得 $\frac{1}{4}(x_1-x_3)+\frac{1}{3}(y_1-y_3)=0$，

所以 $k_{MN}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{4}$．--12 分

22．【解析】:（1）$f'(x)=e^x-a\cos x$，--1 分

①当 $0<a\le1$ 时，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $a\cos x<1$，$1<e^x<e^\pi$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，没有极值点，不合题意，舍去；--2 分

②当 $a>1$ 时，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x+a\sin x$，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $g'(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上递

增，又因为$f'(0)=1-a<0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$，----------------------3 分

所以$f'(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点x_1，且$x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$x\in(0,x_1)$，$f'(x)<0$；$x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)>0$，所以

$f(x)$在$(0,\pi)$上有唯一极值点，符合题意．综上，$a\in(1,+\infty)$．----------4 分

(2) 由 (1) 知$a>1$，所以$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$f'(x)=e^x-a\cos x>0$，所以$x\in(0,x_1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

$x\in(x_1,\pi)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，------------------------------6 分

所以$x\in(0,x_1)$时，$f(x)<f(0)=0$，则$f(x_1)<0$，又因为$f(\pi)=e^{\pi}-1>0$，

所以$f(x)$在(x_1,π)上有唯一零点x_2，即$f(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点x_2．-------------8 分

因为$f(2x_1)=e^{2x_1}-a\sin 2x_1-1=e^{2x_1}-2a\sin x_1\cos x_1-1$，由 (1) 知$f'(x_1)=0$，所以$e^{x_1}=a\cos x_1$，

则$f(2x_1)=e^{2x_1}-2e^{x_1}\sin x_1-1$，------------------------------9 分

构造$p(t)=e^{2t}-2e^t\sin t-1,t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$p'(t)=2e^{2t}-2e^t(\sin t+\cos t)=2e^t\left(e^t-\sin t-\cos t\right)$，

记$\varphi(t)=e^t-\sin t-\cos t,t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\varphi'(t)=e^t-\cos t+\sin t$，-----------------10 分

显然$\varphi'(t)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$\varphi'(t)>\varphi'(0)=0$，

所以$\varphi(t)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$\varphi(t)>\varphi(0)=0$，所以$p'(t)>0$，所以$p(t)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以

$p(t)>p(0)=0$，--11 分

所以$f(2x_1)>0=f(x_2)$，由前面讨论可知：$x_1<2x_1<\pi$，$x_1<x_2<\pi$，且$f(x)$在(x_1,π)上单调递增，所以

$2x_1>x_2$．----------------------------------12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。