# 新八校第二次联考理科数学答案

**一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | B | C | D | A | B | D | C | B | D | B | A |

1.【详解】$A=\{0,1,2,3\}$，$B=[-1,1]$，则 $A\cap B=\{0,1\}$，故选：D.

2. 【详解】$z=\dfrac{-1}{1-i}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$，所以 $\overline{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$，它对应的点在第二象限.故选 B.

3.【详解】根据含有全称量词命题的否定可知，

命题 $p$：$\forall x\geq 0$，$e^x\geq x^2+1$，则命题 $p$ 的否定为：$\exists x\geq 0$，$e^x<x^2+1$．故选：C

4.【详解】由 $\vec{a}+\vec{b}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 知 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$，所以 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}$ 构成一个菱形，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{a}$ 的夹角为 $\dfrac{5\pi}{6}$．故选：D.

5.【详解】将 5 人分成 3 堆，有两种情况：

①3，1，1 ，有 $C_5^3C_2^1A_2^2=40$；

②2，2，1 ，有 $\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}C_2^1A_2^2=60$； 所以共有 100 种安排方法．故选：A.

6. 【详解】易得 $a=\left(\sin x+\dfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2$，所以含有 $x^5y^3$ 的项为 $C_6^3(-2y)^3C_3^2(x^2)^2C_1^1x$ $=-480x^5y^3$，所以其系数为 $-480$，故选 B.

7.【详解】圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $(1,1)$，依题意，点 $(1,1)$ 在直线 $ax+by-1=0(a>0,b>0)$ 上，因此 $a+b-1=0$，即 $a+b=1(a>0,b>0)$

$\dfrac{b^2+2a}{ab}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{2(a+b)}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}+2\geq 2\sqrt{2}+2$，当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}-1$，$b=2-\sqrt{2}$ 时等号成立.所以 $\dfrac{b^2+2a}{ab}$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$，故选：D.

8.【详解】易得 $a_n=\cos\dfrac{2n\pi}{3}$，因此 $b_n=(3n-1)\cos\dfrac{2n\pi}{3}$，

所以 $b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k}=(9k-7)(-\frac{1}{2})+(9k-4)(-\frac{1}{2})+(9k-1)\cdot 1=\frac{9}{2}$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 60 项和为 $\frac{9}{2}\cdot 20=90$．故选：C.

9．B

【详解】①$X\sim B\left(n,\frac{2}{3}\right)$，则 $D(3X-1)=9D(X)=9\times n\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=2n=6$，则 $n=3$，故

①对.

②$\xi\sim N(\mu.\sigma^2)$，因为函数 $f(x)=P(x+1<\xi<x+4)$ 为偶函数，

则 $f(-x)=P(-x+1<\xi<-x+4)=f(x)=P(x+1<\xi<x+4)$，

区间 $(-x+1,-x+4)=(x+1,x+4)$ 关于 $x=\mu$ 对称，故 $\mu=\dfrac{-x+1+x+4}{2}=\dfrac{5}{2}$，选项②错误；

③．令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$ 则 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\tan(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{6},0\right)$，$k\in Z$ .故③错误

④因为函数 $f(x)=x^3-kx+k$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f'(x)=3x^2-k\geq 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，则 $k$ 的取值范围是 $(-\infty,3]$,故选项④错误；

⑤若 $f(3x+1)-3x$ 为偶函数，则 $f(3x+1)-3x$ 关于直线 $x=0$ 对称，将 $f(3x+1)-3x$ 纵坐标不变，横坐标变为原来的 3 倍，可得 $f(x+1)-x$，

则函数 $f(x+1)-x$ 关于直线 $x=0$ 对称，即 $f(x+1)-x$ 为偶函数，所以

$f(x+1)-x=f(-x+1)+x$，则 $f(x+1)=f(-x+1)+2x$，从而可得，当 $x\neq 0$ 时，

$\dfrac{f(x+1)}{x}=\dfrac{f(-x+1)}{x}+2$，即 $\dfrac{f(x+1)}{x}+\dfrac{f(-x+1)}{-x}=2$，

令 $h(x)=\dfrac{f(x+1)}{x}$，则 $h(-x)=\dfrac{f(-x+1)}{-x}$，所以 $h(x)+h(-x)=2$，所以函数函数 $\dfrac{f(x+1)}{x}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，故⑤正确；

10．D

【详解】由第三定义得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{8}{9}$，而 $k_{DM}=6k_{PA}$，所以

$k_{DM}\cdot k_{PB}=6k_{PA}\cdot k_{PB}=6\cdot\left(-\dfrac{8}{9}\right)=-\dfrac{16}{3}$. 故选 D.

11. B

【详解】设 $f(x)=x-\ln x$，$x>0$，则有 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(0.8)>f(1)=1$，$f(1.2)>f(1)=1$，即有 $a>1,b>1$

令 $g(x)=x-x\ln x(x>0)$，则 $g(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

所以 $g(1.008)<g(1)=1$，故 $a>c$，$b>c$，

令 $h(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x(-1<x<1)$，有 $h'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}-2=\dfrac{2x^2}{1-x^2}>0$，

可得函数 $h(x)$ 单调递增，故有 $h(0.2)>h(0)=0$，即 $\ln 1.2-\ln 0.8-0.4>0$，

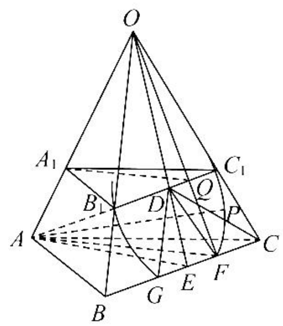
可得 $0.8-\ln 0.8>1.2-\ln 1.2$，故 $a>b$，综上所述，$c<b<a$. 故选：B.

12.【详解】依题意，延长正三棱台侧棱相交于点 $O$，取 $B_1C_1$ 中点 $D$，

$BC$ 中点 $E$，连接 $AD,DE,AE$，则有 $OA=OB=OC$，

所以 $DE$ 的延长线必过点 $O$ 且 $DE\perp B_1C_1,DE\perp BC$，

过点 $D$ 作 $DF\parallel C_1C,DG\parallel B_1B$，则四边形 $DFCC_1$ 是边长为 2 的菱形.




如图所示：在 $\triangle OBC$ 中，$\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{OC_1}{OC}=\dfrac{OC_1}{OC_1+C_1C}$，即 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{OC_1}{OC_1+1}$，

解得 $OC_1=4$，所以 $OC=OC_1+C_1C=4+2=6$，所以 $\triangle OBC$ 为边长为 6 的等边三角形，

所以 $\angle DFE=\angle FDC_1=\angle OCB=\dfrac{\pi}{3}$，$OE=3\sqrt{3}$，所以

$DE=DF\times\sin\dfrac{\pi}{3}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

因为 $\triangle ABC$ 是边长为6的等边三角形且 $E$ 为 $BC$ 中点，所以 $AE=3\sqrt{3}$， $BC\perp AE$，

在 $\triangle OAE$ 中，由余弦定理变形得，

$$\cos\angle OEA=\frac{OE^2+AE^2-OA^2}{2\cdot OE\cdot AE}=\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2-6^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

在 $\Delta ADE$ 中，由余弦定理变形得，

$$\cos\angle DEA=\frac{DE^2+AE^2-AD^2}{2\cdot DE\cdot AE}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2-AD^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

解得 $AD=2\sqrt{6}$，所以 $AE^2=DE^2+AD^2$，所以 $AD\perp DE$；

由 $BC\perp AE,BC\perp OE,AE\cap OE=E$，可得 $BC\perp$ 平面 $AOE$，

又 $AD\subset$ 平面 $AOE$，所以 $BC\perp AD$，

由 $BC\perp AD$， $AD\perp DE$， $BC\bigcap DE=E$，可得 $AD\perp$ 平面 $BCC_1B_1$，

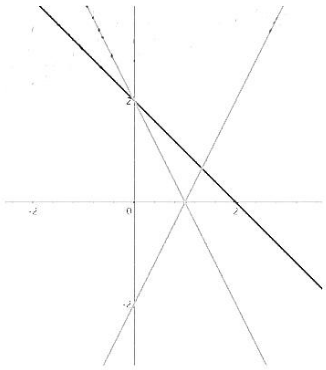
因为 $AP$ 与平面 $BCC_1B$ 所成角的正切值为 $\sqrt{6}$，

所以 $\frac{AD}{DP}=\sqrt{6}$，解得 $DP=2$， $AP=\sqrt{AD^2+DP^2}=\sqrt{24+4}=2\sqrt{7}$，

所以点 $P$ 在平面 $BCC_1B_1$ 的轨迹为 $\overset{\frown}{C_1F},\overset{\frown}{B_1G}$，

设 $\overset{\frown}{C_1F}$ 的长度为 $l$，则 $l=\left|\angle FDC_1\right|\times\left|DP\right|=\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$，

因此所有满足条件的动线段 $P$ 形成的轨迹长度为 $\frac{4\pi}{3}$，故选：A.



13. $\frac{4}{5}$

解：$z=x^2+y^2$ 可以理解为原点到可行域内一点的距离的平方，画出可行域，如图所示，由图可知，原点到直线 $2x+y-2=0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $z$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$.

14. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ 或 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 或 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$ 或 $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{6}=1$（只填写一个即可）

【详解】若 $m>0$ 时，

选①，易得$c=3$，所以$2m+m=9$，所以$m=3$，所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$.

选②，易得$b=2$，所以$m=4$，所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$.

选③，易得椭圆$\Gamma$的焦点坐标为$\left(\pm\sqrt{3},0\right)$，所以$c=\sqrt{3}$，所以$2m+m=3$，即$m=1$，所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

若$m<0$时，

选①，易得$c=3$，所以$-m-2m=9$，所以$m=-3$，所以双曲线的方程为$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{6}=1$.

选②，易得$b=2$，所以$m=-2$，所以双曲线的方程为$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$.

选③，焦点不可能落在$x$轴上，所以不存在.

15. $\frac{89\pi}{4}$

【详解】由三视图可知，四棱锥$S-ABCD$的底面为矩形，侧面$SAB$垂直于底面$ABCD$，$\Delta SAB$的外接圆半径为$\frac{5}{4}$，根据汉堡模型可得，$R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{89}{16}$，四棱锥$S-ABCD$的外接球的表面积为$S=4\pi R^2=\frac{89\pi}{4}$.

16. 【详解】令$r(x)=ae^{ax}-\ln(x+\frac{2}{a})-2$，

①当$a<0$时，当$x\to+\infty$时，$r(x)\to-\infty$，显然不成立.

②当$a>0$时，$r(x)=ae^{ax}-\ln(x+\frac{2}{a})-2\geq0$在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立，

即$ae^{ax}+ax+\ln a\geq\ln\left(ax+2\right)+ax+2$在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立，

令$m\left(x\right)=x+\ln x, ae^{ax}+ax+\ln a\geq\ln\left(ax+2\right)+ax+2$在$\left(-\frac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立，即$m\left(ae^{ax}\right)\geq m\left(ax+2\right)$.

显然$m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，得$ae^{ax}\ge ax+2$在$\left(-\dfrac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立.即

$e^{ax}-x-\dfrac{2}{a}\ge 0$恒成立，令$l(x)=e^{ax}-x-\dfrac{2}{a},l'(x)=ae^{ax}-1$，

可得$l(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{-\ln a}{a}\right)$上单调递减，在$\left(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty\right)$上单调递增，

当$-\dfrac{\ln a}{a}\le-\dfrac{2}{a}$时，即$a\ge e^2$，$l(x)$在$\left(-\dfrac{2}{a},+\infty\right)$上单调递增，而$l(-\dfrac{2}{a})>0$，所以

$ae^{ax}\ge ax+2$在$\left(-\dfrac{2}{a},+\infty\right)$上恒成立.

当$-\dfrac{\ln a}{a}>-\dfrac{2}{a}$时，即$0<a<e^2$，$l(x)$在$(-\dfrac{2}{a},-\dfrac{\ln a}{a})$上单调递减，在$\left(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty\right)$上单

调递增，故$l\left(-\dfrac{\ln a}{a}\right)=\dfrac{\ln a-1}{a}\ge 0$，解得$e\le a<e^2$.

综上，$a$的取值范围为$[e,+\infty)$.

17. 解：（1）因为$\sin^2B-\sin B\cdot\sin C-2\sin^2C=0$，

由正弦定理，得$b^2-bc-2c^2=0$.……………………………………2 分

所以$b=2c$，即$\dfrac{b}{c}=2$. ……………………………………5 分

（2）以$BC$所在直线为$x$轴，以$BC$中垂线为$y$轴建立直角坐标系，则$B(-2,0)$，$C(2,0)$，

设$A(x,y)$，则由$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{1}{4}$可得：点A的轨迹方程为$x^2+y^2+\dfrac{20}{3}x+4=0$，

即$\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{64}{9}(y\ne 0)$，……………………………………10 分

$\therefore$当$|y_A|=\dfrac{8}{3}$时，$S_{\triangle ABC}$的最大值为$\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}$.

……………………………………12 分

18. 解：（1）因为甲是以3：1赢球，所以第四场一定是甲赢，

甲以3：1赢球的概率为$C_3^2\cdot(\dfrac{1}{3})^2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$. ……………………………………5 分

（2）依题意知$X$的可能取值为1000，2000，2600，3600，4800，

$P(X=1000)=(1-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$, ……………………………………6 分

$P(X=2000)=(1-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$ ……………………………………7 分

$P(X=2600)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$, ……………………………………8 分

$P(X=3600)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$, ……………………………………9 分

$P(X=4800)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, ……………………………………10 分

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 1000 | 2000 | 2600 | 3600 | 4800 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{1}{9}$ |

故 $EX=\frac{4}{9}\times1000+\frac{4}{27}\times2000+\frac{4}{27}\times2600+\frac{4}{27}\times3600+\frac{1}{9}\times4800=\frac{59200}{27}$.

……………………………………12 分

19.解：（1）连接 $DB$ 交 $AC$ 于点 $O$，连接 $PO$.

因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，且 $O$ 为 $BD$ 的中点. ……………………2 分

因为 $PB=PD$，所以 $PO\perp BD$.

又因为 $AC$，$PO\subset$ 平面 $APC$，且 $AC\cap PO=O$，所以 $BD\perp$ 平面 $APC$.

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $APC\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………5 分

（2）取 $AB$ 中点 $M$，连接 $DM$ 交 $AC$ 于点 $H$，连接 $PH$.

因为 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形，所以 $DM\perp AB$.

又因为 $PD\perp AB$，$PD\cap DM=D$，$PD,DM\subset$ 平面 $PDM$，

所以 $AB\perp$ 平面 $PDM$. 所以 $AB\perp PH$. ……………………………7 分

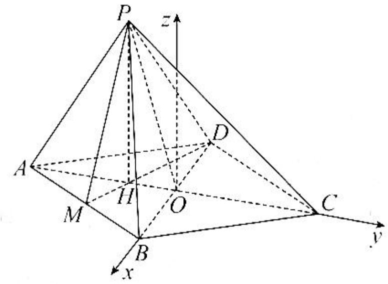
由（1）知 $BD\perp PH$，且 $AB\cap BD=B$，所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$.

由 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，在 $\triangle ABC$ 中，$AH=\frac{AM}{\cos30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AO=AB\cdot\cos30^\circ=\sqrt{3}$.

由 $AP\perp PC$，在 $\triangle APC$ 中，$PH^2=AH\cdot HC=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8}{3}$,

所以$PH=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. ……………………8 分

以$O$为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$分别为$x$轴、$y$轴建立如图所示空间直角坐标系，




则$A\left(0,-\sqrt{3},0\right)$，$C\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$D\left(-1,0,0\right)$，$H\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$P\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{DP}=(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{CD}=\left(-1,-\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，

设平面$PCD$的法向量为$\vec{n}_1=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-\sqrt{3}y_1=0\\ x_1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0\end{cases}$，令$y_1=1$得$\overrightarrow{n_1}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{2})$.

设平面$PAD$的法向量为$\vec{n}_2=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ x_2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0\end{cases}$，所以令$y_2=1$得$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

……………………10 分

设平面$PCD$与平面$PAD$的夹角为$\theta$.

所以，$\cos\theta=\left|\cos<\vec{n}_1,\vec{n}_2>\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\left|\dfrac{-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{2}}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以，平面$PCD$与平面$PAD$所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………12 分

20.【小问 1 详解】解：$f(x)\ge 0$ 等价于 $\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}\ge 0$，令 $g(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}(x\ge 1)$，

$g(1)=0$，所以

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-a\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-2ax}{x\cdot(x+1)^2}=\dfrac{x^2+(2-2a)x+1}{x\cdot(x+1)^2}$，……………………2 分

$\Delta=4(1-a)^2-4=4(a^2-2a)$，

当 $0<a\le 2$ 时，$\Delta\le 0$，所以 $g'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 恒大于等于 0，所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\in[1,+\infty)$，有 $g(x)\ge g(1)$，原不等式成立. ……………………3 分

当 $a>2$ 时，$\Delta>0$，所以 $g'(x)=0$ 有两个正根 $x_1$，$x_2$，且 $x_1<1<x_2$，

当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,x_2)$ 上单调递减，所以当 $x\in(1,x_2)$，

$g(x)<g(1)=0$，与题意矛盾.

综上，$a$ 的取值范围是 $(0,2]$. ……………………………………6 分

【小问 2 详解】由（1）知，当 $a=2$ 时，$f(x)\ge 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，即 $\ln x\ge\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，当且仅当 $x=1$ 时等号成立. ……………………………………7 分

令 $x=1+\dfrac{4}{4n-3}$，$n\in N^*$，所以 $\ln(1+\dfrac{4}{4n-3})>\dfrac{2\cdot\dfrac{4}{4n-3}}{2+\dfrac{4}{4n-3}}=\dfrac{4}{4n-1}$，……………………9 分

$\therefore\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{7}+\cdots+\dfrac{4}{4n-1}<\ln\dfrac{5}{1}+\ln\dfrac{9}{5}+\cdots+\ln\dfrac{4n+1}{4n-3}=\ln(4n+1)$，

即 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{4n-1}<\dfrac{1}{4}\cdot\ln(4n+1)=\ln\sqrt[4]{4n+1}$，命题得证. ……………………………12 分

21.解：（1）设圆心 $M(x,y)$，依题意，$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$，……………………………2 分

化简整理得 $x^2=4y$，

所以圆心 $M$ 的轨迹 $\Gamma$ 的方程是：$x^2=4y$. ……………………………………5 分

（2）设 $A(4a,4a^2)$，$B(4b,4b^2)$，$C(4c,4c^2)$，则

直线 $AB$ 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{4a^2-4b^2}{4a-4b}=a+b$，

所以直线 $AB$ 的方程是：$y-4a^2=(a+b)(x-4a)$，化简得 $y=(a+b)x-4ab$.

同理可得：

直线 $AC$ 的方程是 $y=(a+c)x-4ac$，

直线 $BC$ 的方程是 $y=(b+c)x-4bc$. ……………………………………7 分

因为直线 $AB$ 过点 $P(2,3)$，所以 $3=2(a+b)-4ab$.

因为直线 $AC$ 过点 $Q(6,3)$，所以 $3=6(a+c)-4ac$. ……………………………………8 分

由 $3=2(a+b)-4ab$ 得，$a=\dfrac{3-2b}{2-4b}$.

由 $3=6(a+c)-4ac$ 得，$a=\dfrac{3-6c}{6-4c}$. ……………………………………10 分

消去 $a$，得到 $4bc=3$，所以直线 $CB$ 恒过点 $(0,-3)$. ……………………………………12 分

22．解：（1）法一：因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y=\dfrac{2\sqrt{2}t}{1-t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数），

所以 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=\left(\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2-\left(\dfrac{2t}{1-t^2}\right)^2=1$，

所以曲线 $C$ 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1(x\neq-1)$.

法二：令 $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，所以 $x=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$y=\sqrt{2}\tan\alpha$，所以曲线 $C$ 的方程为

$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1(x\neq-1)$. ……………………………………3 分

又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$\therefore l$ 的直角坐标方程为：$kx-y-1=0$. ……………………5 分

（2）联立直线 $l$ 与曲线 $C$ 的方程得 $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{2}=1 \\ y=kx-1 \end{cases}$，消去 $y$ 得 $(2-k^2)x^2+2kx-3=0$，

当 $k=\pm\sqrt{2}$ 时，方程只有一个解，符合题意. ……………………7 分

当 $k\neq\pm\sqrt{2}$ 时，因为直线 l 与曲线 C 恰有一个交点，所以 $\Delta=0$，即 $k=\pm\sqrt{3}$，经检验，符合题意. ……………………9 分

另外，当$k=-1$时，直线l与曲线C恰有一个交点.

综上，$k=\pm\sqrt{3}$或$k=\pm\sqrt{2}$或$k=-1$. ……………………………………10 分

23. 解：（1）当$x\le-\frac{1}{2}$时，$f(x)=1-2x-1-2x\le5$，解得$-\frac{5}{4}\le x\le-\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$时，$f(x)=1-2x+2x+1\le5$，解得$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

当$x\ge\frac{1}{2}$时，$f(x)=2x-1+2x+1\le5$，解得$\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{4}$.

综上，不等式$f(x)\le5$的解集为$\left[-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right]$. ……………………………………5 分

（2）由绝对值三角不等式可得，$f(x)=|2x-1|+|2x+1|\ge\left|(2x-1)-(2x+1)\right|=2$，

$M=2$，所以$a+b+c=2$.

因为

$\frac{a^2}{b}+b\ge2a$，当且仅当$a=b$时等号成立，

$\frac{b^2}{c}+c\ge2b$，当且仅当$b=c$时等号成立

$\frac{c^2}{a}+a\ge2c$，当且仅当$a=c$时等号成立，

上述三式相加，可得$\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\ge2a+2b+2c$，

即$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c=2$，当且仅当$a=b=c$时等号成立. ……………………………7 分

另外由柯西不等式知，$\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(1^2+1^2+1^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$，当且仅当$a=b=c$时等号成立，即$\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{4}{3}$. ……………………………………9 分

所以$\frac{a^2+b^3}{b}+\frac{b^2+c^3}{c}+\frac{c^2+a^3}{a}=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a^2+b^2+c^2\ge2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$，当且仅当$a=b=c$时等号成立. 命题得证. ……………………………………10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。