

绝密★启用前

炎德·英才大联考湖南师大附中 2019 届高考模拟卷(二)

数 学(理科)

命题:贺仁亮 朱修龙 周艳军 黄钢 审题:高三数学备课组

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则

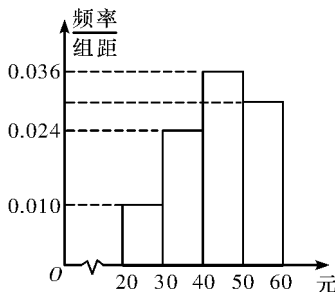
A. $M=N$ B. $M \subsetneq N$ C. $N \subsetneq M$ D. $M \cap N = \emptyset$
2. 若复数 $z = (1-ai)(a+2i)$ 在复平面内对应的点在第一象限,其中 $a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位,则实数 a 取值范围是

A. $(0, \sqrt{2})$ B. $(\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(-\infty, -\sqrt{2})$ D. $(-\sqrt{2}, 0)$
3. 如果等差数列 a_1, a_2, \dots, a_8 的各项都大于零,公差 $d \neq 0$, 则

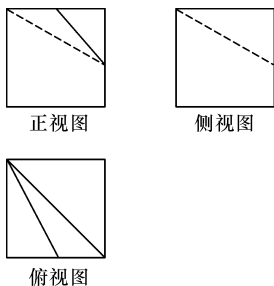
A. $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$ B. $a_1 a_8 < a_4 a_5$ C. $a_1 + a_8 < a_4 + a_5$ D. $a_1 a_8 > a_4 a_5$
4. 若函数 $y = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega \in \mathbf{N}^*$) 图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{6}, 0)$, 则 ω 的最小值为

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
5. 学校为了调查学生在课外读物方面的支出情况,抽出了一个容量为 n 的样本,其频率分布直方图如图所示,其中支出在 $[50, 60)$ 元的同学有 30 人,则 n 的值为

A. 100 B. 1000 C. 90 D. 900



6. 已知一个几何体的三视图如图所示(正方形的边长为1),则该几何体的体积为

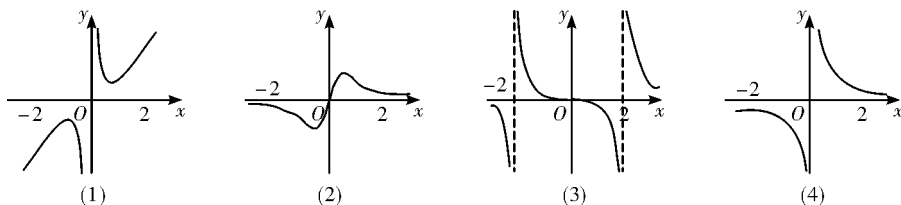


- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{15}{16}$ D. $\frac{23}{24}$

7. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于2的偶数可以表示为两个素数的和”, 在不超过20的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于20的概率是

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{1}{18}$ D. $\frac{1}{14}$

8. 下列图象可以作为函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ 的图象有



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

9. 已知点集 $M = \{(x, y) \mid \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy\}$, 则平面直角坐标系中区域M的面积是

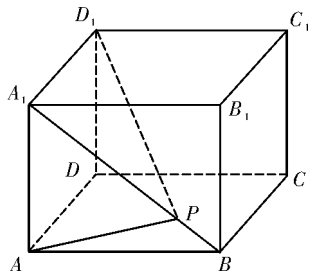
- A. 1 B. $3 + \frac{\pi}{4}$ C. π D. $2 + \frac{\pi}{2}$

10. 已知向量 $\mathbf{a} = (\frac{5}{2}, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 5)$ 的起点均为原点, 而终点依次对应点A, B, 线段AB边上的点P, 若 $\vec{OP} \perp \vec{AB}$, $\vec{OP} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, 则x, y的值分别为

- A. $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$

11. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $|AB| = |AD| = \sqrt{3}$, $|AA_1| = 1$, 而对角线 A_1B 上存在一点P, 使得 $|AP| + |D_1P|$ 取得最小值, 则此最小值为

- A. 2
B. 3
C. $1 + \sqrt{3}$
D. $\sqrt{7}$



12. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = e^{-ax} - \ln(x+a) - 1 (x > 0)$ 的最小值为0, 则实数a的取值范围是

- A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, 1)$ C. $\{\frac{1}{2}\}$ D. \emptyset

第 II 卷

二、填空题:本大题共 4 个小题,每小题 5 分,满分 20 分.请把答案填在答题卷对应题号后的横线上.

13. 定积分 $\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字填写答案)

15. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与双曲线 $C_2: x^2 - y^2 = 4$ 有相同的右焦点 F_2 , 点 P 是椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的一个公共点, 若 $|PF_2| = 2$, 则椭圆 C_1 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等差数列, 且 $a_1b_1 = m, a_2b_2 = 4, a_3b_3 = 8, a_4b_4 = 16$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

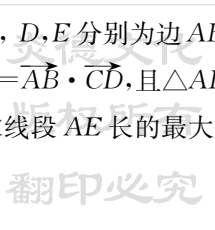
(一) 必考题:共 60 分.

17. (本题满分 12 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为边 AB, BC 的中点, $2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|$,

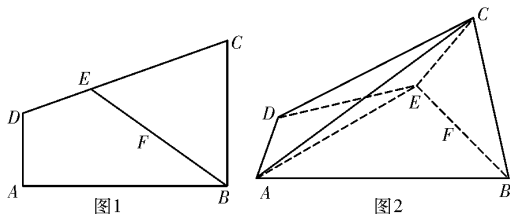
(1) 若 $2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{CD}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, 求边 AC 的长;

(2) 若 $BC = \sqrt{3}$, 求线段 AE 长的最大值.



18. (本题满分 12 分)

如图 1, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC, AD \perp AB, AD = 1, BC = 2, E$ 为 CD 上一点, F 为 BE 的中点, 且 $DE = 1, EC = 2$, 现将梯形沿 BE 折叠 (如图 2), 使平面 $BCE \perp$ 平面 $ABED$.



(1) 求证: 平面 $ACE \perp$ 平面 BCE ;

(2) 能否在边 AB 上找到一点 P (端点除外) 使平面 ACE 与平面 PCF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$?

若存在, 试确定点 P 的位置, 若不存在, 请说明理由.

19. (本题满分 12 分)

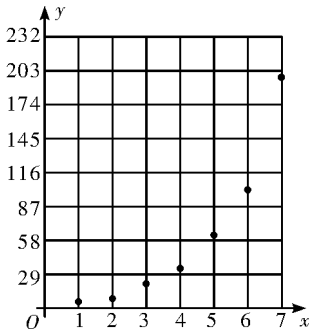
近期, 某市公交公司推出扫码支付 1 分钱乘车活动, 活动设置了一段时间的推广期, 由于推广期内优惠力度较大, 吸引越来越多的人开始使用扫码支付. 629 路公交车统计了活动刚推出一周内每一天使用扫码支付的人次, 用 x 表示活动推出的天数, y 表示每天使用扫码支付

的人次(单位:十人次),统计数据如表 1 所示:

表 1:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	6	11	21	34	66	101	196

根据以上数据,绘制了散点图.



- (1) 根据散点图判断,在推广期内, $y=a+bx$ 与 $y=c \cdot d^x$ (c, d 均为大于零的常数)哪一个适宜作为扫码支付的人次 y 关于活动推出天数 x 的回归方程类型(给出判断即可,不必说明理由);
- (2) 根据(1)的判断结果及表 1 中的数据,建立 y 关于 x 的回归方程,并预测活动推出第 8 天使用扫码支付的人次;
- (3) 推广期结束后,车队对乘客的支付方式进行统计,结果如下

支付方式	现金	乘车卡	扫码
比例	10%	60%	30%

车队为缓解周边居民出行压力,以 80 万元的单价购进了一批新车,根据以往的经验可知,每辆车每个月的运营成本约为 0.66 万元. 已知该线路公交车票价为 2 元,使用现金支付的乘客无优惠,使用乘车卡支付的乘客享受 8 折优惠,扫码支付的乘客随机优惠,根据统计结果得知,使用扫码支付的乘客中有 $\frac{1}{6}$ 的概率享受 7 折优惠,有 $\frac{1}{3}$ 的概率享受 8 折优惠,有 $\frac{1}{2}$ 的概率享受 9 折优惠. 预计该车队每辆车每个月有 1 万人次乘车,根据所给数据以事件发生的频率作为相应事件发生的概率,在不考虑其它因素的条件下,按照上述收费标准,假设这批车需要 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 年才能开始盈利,求 n 的值.

参考数据:

\bar{y}	\bar{v}	$\sum_{i=1}^7 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^7 x_i v_i$	$10^{0.54}$
62.14	1.54	2535	50.12	3.47

其中 $v_i = \lg y_i$, $\bar{v} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 v_i$.

参考公式:对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $\hat{v} = \hat{a} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}, \hat{a} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

20. (本题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 以上顶点和右焦点为直径端点的圆与直线 $x + y - 2 = 0$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 是否存在斜率为 2 的直线, 使得当直线与椭圆 C 有两个不同的交点 M, N 时, 能在直线

$y = \frac{5}{3}$ 上找到一点 P , 在椭圆 C 上找到一点 Q , 满足 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NQ}$? 若存在, 求出直线的方程; 若不存在, 说明理由.

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x, g(x) = e^x$.

(1) 设函数 $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 + ax (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $h(x)$ 的极值点个数;

(2) 设直线 l 为函数 $f(x)$ 的图象上一点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线, 试探究: 在区间 $(1, +\infty)$ 上是否存在唯一的 x_0 , 使得直线 l 与曲线 $y = g(x)$ 相切.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本题满分 10 分) 选修 4-4: 极坐标与参数方程

在平面直角坐标系中, 将曲线 C_1 向左平移 2 个单位, 再将得到的曲线上的每一个点的横坐标保持不变, 纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到曲线 C_2 , 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos \alpha$.

(1) 求曲线 C_2 的参数方程;

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t + 2 \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 求曲线 C_2 上到直线 l 的距离最短的点的直

角坐标.

23. (本题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设 $f(x) = |x-1| + |x+1|$.

(1) 求 $f(x) \leq x+2$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq \frac{|a+1| - |2a-1|}{|a|}$ 对任意实数 $a \neq 0$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注