江西省新八校协作体2022届高三第二次联考

一、选择题

1．全集 $U=R$，集合 $A=\{x|2x^2+x-1\geqslant 0\}$，$B=\{x|y=\sqrt{3x-1}\}$，则（$\complement_U A$）$\cap B=$（　　）

A．$(2,+\infty)$　　B．$(\frac{1}{2},+\infty)$　　C．$[\frac{1}{3},2)$　　D．$[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

【解答】解：全集 $U=R$，集合 $A=\{x|2x^2+x-1\geqslant 0\}$，$B=\{x|y=\sqrt{3x-1}\}$，

$\therefore A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant\frac{1}{2}\}$，$B=\{x|x\geqslant\frac{1}{3}\}$，$\therefore\complement_U A=\{x|-1<x<\frac{1}{2}\}$，

（$\complement_U A$）$\cap B=\{x|\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}\}$．故选：$D$．

2．关于复数 $z=(a+bi)$（a，$b\in\mathrm{R}$，i 为虚数单位），下列说法正确的是（　　）

A．若 $z=-1+i$，则 $|z|=2$　　B．若 $\overline{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $\overline{z}\cdot z=z^2$

C．复数 $z=1+2i$ 的虚部为 $2i$　　D．若 $z=\frac{2i}{(1+\sqrt{3}i)}$，则 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

【解答】解：若 $z=-1+i$，则 $|z|=\sqrt{2}$，故 A 错误，

若 $\overline{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $\overline{z}\cdot z=(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2$，而 $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$，故 B 错误，

复数 $z=1+2i$ 的虚部是 2，故 C 错误，

若 $z=\frac{2i}{(1+\sqrt{3}i)}$，则 $z=\frac{2i(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，

故 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，故 D 正确，

3．某校有 1000 人参加某次模拟考试，其中数学考试成绩近似服从正态分布 $N(105,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，试卷满分 150 分，统计结果显示数学成绩优秀（高于 120 分）的人数占总人数的 $\frac{1}{5}$，则此次数学考试成绩在 90 分到 105 分（含 90 分和 105 分）之间的人数约为（　　）

A．150　　B．200

C．300　　D．400

【详解】

由题意，随机变量 $X\sim N(105,\sigma^2)$，即 $\mu=105$，即正态分布曲线的对称轴为 $x=105$，

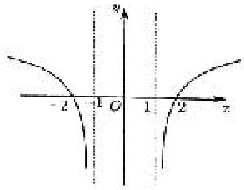
因为 $P(X<90)=P(X>120)=\frac{1}{5}$，所以 $P(90<X<120)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，

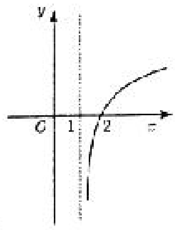
所以 $P(90\leq X\leq 105)=\frac{1}{2}P(90\leq X\leq 120)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

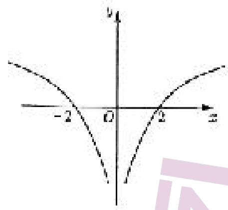
所以此次数学考试成绩在 90 分到 105 分之间的人数约为 $1000\times\frac{3}{10}=300$．

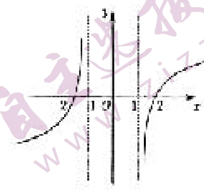
故选：C．

4.函数 $f(x)=\log_2(|x|-1)$ 的图像为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【解答】解：由 $|x|-1>0$ 得 $x>1$ 或 $x<-1$，即函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，排除 B，C，

$f(-x)=\log_2(|-x|-1)=\log_2(|x|-1)=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数，排除 D．故选：A．

5．在下列五个命题中，其中正确的个数为（　　）

①命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+x+1>0$"的否定为"$\exists x\notin\mathbf{R}$，有 $x^2+x+1\leqslant 0$"；

②已知 $\vec{a}=(k-1,4-2k)$，$\vec{b}=(4,1)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为锐角，则 k 的取值范围是 $k>0$；

③"$\dfrac{1}{x}\geqslant 1$"成立的一个充分不必要条件是"$0<x<1$"；

④已知 l 是一条直线，α，β 是两个不同的平面，若 $l\perp\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$．

⑤函数 $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后所得函数解析式为 $y=2\sin 2x$．

A．4　　　B．3　　　C．2　　　D．1

【解答】解：对于①，命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+x+1>0$"的否定为"$\exists x\in\mathbf{R}$，有 $x^2+x+1\leqslant 0$"，故①错误；

对于②，因为向量 $\vec{a}=(k-1,4-2k)$ 与 $\vec{b}=(4,1)$ 的夹角为锐角，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，且 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线；

即 $4(k-1)+4-2k>0$，且 $k-1-4(4-2k)\neq 0$，

所以 $k>0$，且 $k\neq\dfrac{17}{9}$，故②错误；

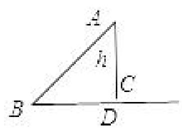
对于③，由 $\dfrac{1}{x}\geqslant 1$ 可得 $0<x\leqslant 1$，所以③"$\dfrac{1}{x}\geqslant 1$"成立的一个充分不必要条件是"$0<x<1$"，故③正确；

对于④，若 $l\perp\alpha$，$l\perp\beta$，根据面面垂直的判定定理可知 $\alpha\perp\beta$，故④正确；

对于⑤，函数 $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后所得函数解析式为 $y=2\sin[2(x+\dfrac{\pi}{3})-\dfrac{\pi}{3}]=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，故⑤错误．故选：$C$．

6.在△ABC 中，若 $b=3$，$c=2$，$B=45°$，则此三角形解的情况为（　　）

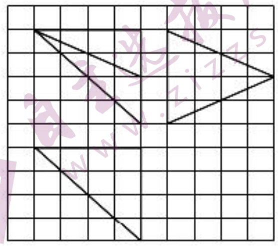
A．无解　　B．两解　　C．一解　　D．解的个数不能确定



【解答】解：过点 A 作 $AD\perp BD$，点 D 在 $\angle B$ 的一条边上，

$\because h=c\sin B=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}<2<3=b=AC$，又 $3>2$，因此此三角形只有一解．故选：C．

7.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体外接球的表面积是（　　）

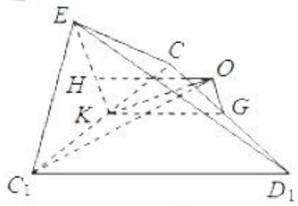


A．41π　　　　B．$\frac{41}{4}\pi$　　　　C．25π　　　　D．$\frac{25}{4}\pi$

【解答】解：由三视图得到直观图，如图，

该几何体为三棱锥 D_1-CC_1E，正方体的棱长为 4，E 为 BB_1 的中点，

取出该几何体如图，



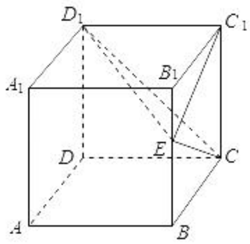
三棱锥 $E-C_1D_1C$，底面三角形 C_1D_1C 为等腰直角三角形，直角边长为 4，

侧面 EC_1C⊥底面 C_1D_1C，$EC_1=EC=2\sqrt{5}$．

则底面三角形的外心为 CD_1 的中点 G，设△EC_1C 的外心为 H，

分别过 G 与 H 作底面 C_1D_1C 与侧面 EC_1C 的垂线相交于 O，

则 O 为三棱锥 $E-C_1D_1C$ 的外接球的球心，



在△EC_1C 中，求得 $CK=4$，$\sin\angle ECK=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，则 $2EH=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=5$，即 $EH=\frac{5}{2}$，

则 $HK=\frac{3}{2}$，$OK^2=(\frac{3}{2})^2+2^2=\frac{25}{4}$，则 $OC_1{}^2=\frac{25}{4}+4=\frac{41}{4}$．

∴该几何体外接球的表面积是 $4\pi\times\frac{41}{4}=41\pi$．故选：$A$．

8.“中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第十六题，叫做“物不知数”问题，原文如下：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二．问物几何？现有一个相关的问题：将 1 到 2021 这 2021 个自然数中被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数按照从小到大的顺序排成一列，构成一个数列，则该数列的项数为（　　）

A．58　　　　B．59　　　　C．60　　　　D．61

【解答】解：被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数构成首项为 23，公差为 35 的等差数列，记为$\{a_n\}$，

则 $a_n=23+35(n-1)=35n-12$，

令 $a_n=35n-12\leqslant 2021$，解得 $n\leqslant 58\frac{3}{35}$．

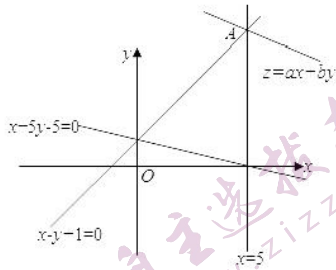
∴将 1 到 2021 这 2021 个自然数中满足被 5 除余 3 且被 7 除余 2 的数按照从小到大的顺序排成一列，

构成一个数列，则该数列的项数是 58．故选：A．

9.设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-5\leqslant 0\\x-y+1\geqslant 0\\x+5y-5\geqslant 0\end{cases}$，且 $z=ax+by$（$a>0$，$b>0$）的最大值为 1，则$\frac{5}{a}+\frac{6}{b}$的最小值为（　　）

A．64　　　　B．81　　　　C．100　　　　D．121

【解答】解：作出约束条件表示的可行域如图，



∵$a>0$，$b>0$，联立$\begin{cases}x-y+1=0\\x=5\end{cases}$，得 $x=5$，$y=6$，

∴当直线 $z=ax+by$ 经过点（5，6）时，z 取得最大值，则 $5a+6b=1$，

∴$\frac{5}{a}+\frac{6}{b}=(\frac{5}{a}+\frac{6}{b})(5a+5b)=61+30(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geqslant 61+60=121$，

当且仅当$a=b=\frac{1}{11}$时，等号成立，∴$\frac{5}{a}+\frac{6}{b}$的最小值为121．故选：D．

10.已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$（$\omega>0$）在区间$[0,\pi]$上有且仅有4条对称轴，给出下列四个结论：

①$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有3个不同的零点；②$f(x)$的最小正周期可能是$\frac{\pi}{2}$；

③ω的取值范围是$[\frac{13}{4},\frac{17}{4})$；　　④$f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{15})$上单调递增．

其中所有正确结论的序号是（　　）

A．①④　　B．②③　　C．②④　　D．②③④

【解答】解：由函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$，

令$\omega x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，则$x=\frac{(1+4k)\pi}{4\omega}$，$k\in Z$

函数$f(x)$在区间$[0,\pi]$上有且仅有4条对称轴，即$0\leqslant\frac{(1+4k)\pi}{4\omega}\leqslant\pi$ 有4个整数符合，

由$0\leqslant\frac{(1+4k)\pi}{4\omega}\leqslant\pi$，得$0\leqslant\frac{1+4k}{4\omega}\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant 1+4k\leqslant 4\omega$，则$k=0,1,2,3$，

即$1+4\times3\leqslant 4\omega<1+4\times4$，∴$\frac{13}{4}\leqslant\omega<\frac{17}{4}$，故③正确；

对于①，∵$x\in(0,\pi)$，∴$\omega x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4})$，

∴$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in(\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2})$，当$\omega x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{2})$时，$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有3个不同的零点；

当$\omega x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{2})$时，$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有4个不同的零点；故①错误；

对于②，周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$，由$\frac{13}{4}\leqslant\omega<\frac{17}{4}$，则$\frac{4}{17}<\frac{1}{10}\leqslant\frac{4}{13}$，∴$\frac{8\pi}{17}<T\leqslant\frac{8\pi}{13}$，故②正确；

对于④，∵$x\in(0,\frac{\pi}{15})$，∴$\omega x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4})$，又$\omega\in[\frac{13}{4},\frac{17}{4})$，∴$\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\in(\frac{7\pi}{15},\frac{8\pi}{15})$，

又$\frac{8\pi}{15}>\frac{\pi}{2}$，所以$f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{15})$上不一定单调递增，故④错误．

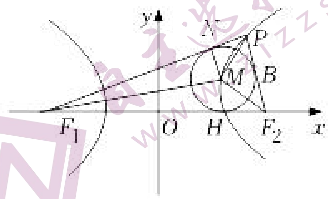
故正确序号为：②③，故选：B．

11.已知F_1，F_2为双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点，P为双曲线右支上异于顶点的任意一点，若A为$\triangle PF_1F_2$内切圆上一动点，当AF_1的最大值为4时，$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{5}{6}$

【解答】解：设△PF_1F_2的内切圆分别与PF_1、PF_2切于点N、B，与F_1F_2切于点H，

则$|PA|=|PB|$，$|F_1N|=|F_1H|$，$|F_2B|=|F_2H|$．又点P在双曲线右支上，



∴$|PF_1|-|PF_2|=2a$，即（$|PM|+|F_1M|$）－（$|PB|+|F_2B|$）$=2a$，

∴$|F_1H|-|F_2H|=2a$，而$|F_1H|+|F_2H|=2c$，设H点坐标为（x，0），

∵$|F_1H|-|F_2H|=2a$，∴（$x+c$）－（$c-x$）$=2a$，解得$x=a$，

由双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的方程知$a^2=1$，$b^2=3$，所以$a=1$，$c^2=1+3=4$，所以$c=2$，

故内切圆的圆心M与在直线$x=1$上，

设内切圆的半径为r，由AF_1的最大值为4知$MF_1=4-r$，

所以$(4-r)^2=3^2+r^2$，解得$r=\frac{7}{8}$．故选：C．

12.设$a=\frac{4(2-\ln4)}{e^2}$，$b=\frac{1}{e}$，$c=\frac{\ln4}{4}$，则a，b，c的大小顺序为（　　）

A. $a<c<b$　　B. $c<a<b$　　C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

【解答】解：根据题意，设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，（$x>0$）则$a=f(\frac{e^2}{4})$，$b=f(e)$，$c=f(4)$，

其导数$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

在区间（1，e）上，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

在区间（e，$+\infty$）上，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

故当$x=e$时，函数取得最大值$f(e)=\frac{1}{e}$，故$b>a$，$b>c$，

设$m=\frac{\ln x}{x}$的零点为x_1，x_2，（$x_1<x_2$），则$mx_1=\ln x_1$，$mx_2=\ln x_2$，

所以$\ln x_2-\ln x_1=m(x_2-x_1)$，$\ln x_2+\ln x_1=\ln x_1x_2=m(x_2+x_1)$ ①，

令$g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，$x>1$，则$g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

故$g(x)$在（1，$+\infty$）单调递增，$g(x)>g(1)=0$，所以，当$x>1$时，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$，

从而$\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$，即$(\ln x_2-\ln x_1)\cdot\frac{1}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_1+x_2}$②，①代入②得，$x_1x_2>e^2$，

令$x_1=\frac{e^2}{4}$，则$x_2>4$，故$f(x_1)=f(x_2)<f(4)$，故$a<c$，综上$a<c<b$．故选：A．

二.填空题

13.若（1 - 2x）$^{2022}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2022}x^{2022}$，则 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2022}}{2^{2022}}$的值 ______.

【解答】解：当 $x=0$ 时，$a_0=1$，当 $x=\frac{1}{2}$时，$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2022}}{2^{2022}}=0$，

$\therefore\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2022}}{2^{2022}}=-1$．故答案为：－1．

14.甲、乙、丙、丁等 6 人排成一排，要求甲、乙两人相邻，并且甲、乙两人与丙、丁两人都不相邻，则不同的排法种数是 ______．（用数字作答）

【解答】解：甲，乙，丙，丁等 6 人排成一排，甲，乙相邻，则把甲乙看成一个整体，甲，乙之间有 A_2^2 种排法，

①当甲，乙整体排在首或尾时，共 $A_2^2A_2^1A_3^3 A_2^2=48$（种），

②当甲，乙整体排在中间 3 个位的排法，$A_2^2A_2^2A_2^2A_3^1=24$（种），

故不同的排法种数为 48+24＝72．故答案为：72．

14.已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)-f(x)=e^{2x}$，且 $f(0)=1$，当 $x\in(0，+\infty)$ 时，$x(f(x)-a)\geq1+lnx$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 ______．

【解答】解：设$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=\frac{e^{2x}}{e^x}=e^x$，

故 $g(x)=e^x+c$，则 $f(x)=(e^x+c)e^x$，又因为 $f(0)=1$，即 $1+c=1$，

所以 $c=0$，$f(x)=e^{2x}$，$x(e^{2x}-a)\geq1+lnx$，

因为 $x\in(0，+\infty)$，所以 $a\leqslant\frac{xe^{2x}-1-\ln x}{x}=\frac{e^{2x+\ln x}-1-\ln x}{x}$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 上恒成立，

其中 $e^{2x+lnx}\geq2x+lnx+1$，

理由如下：构造 $\varphi(x)=e^x-x-1$，

则 $\varphi'(x)=e^x-1$，令 $\varphi'(x)=0$ 得：$x=0$，

当 $x>0$ 得：$\varphi'(x)>0$，当 $x<0$ 得：$\varphi'(x)<0$，

故 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处取的极小值，也是最小值，$\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$，从而得证．

故 $\frac{e^{2x+\ln x}-1-\ln x}{x}\geqslant\frac{2x+\ln x+1-1-\ln x}{x}=2$，故 $a\leqslant2$，

实数 a 的取值范围为（$-\infty$，2]，故答案为：（$-\infty$，2]．

16．在$\triangle ABC$中，$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$，P 是$\triangle ABC$的外接圆上的一点，

若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则 $m+n$ 的最小值是______

【详解】

由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=1+4-2\times1\times2\times\cos60^\circ=3$，所以 $BC=\sqrt{3}$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $AB\perp BC$．以 AC 的中点为原点，建立如图所示的平面直角坐标系，易得 A（-1，0），C（1，0），B（$-\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），设 P 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$，

又 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，所以 $(\cos\theta+1,\sin\theta)=m\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+n(2,0)=\left(\frac{m}{2}+2n,\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$，所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，

$n=\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta$，所以 $m+n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\geq-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，当且仅当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 时，等号成立．故答案为：$-\frac{1}{2}$

三、解答题

17．各项都为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $4S_n=a_n^2+4n$（$n\in N^*$）．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求 $T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}$；

（3）设 $c_n=(-1)^na_n$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 P_n，求使 $P_n>46$ 成立的 n 的最小值．

【解答】解：（1）各项都为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $4S_n=a_n^2+4n$（$n\in N^*$）①，

当 $n=1$ 时，解得 $a_1=2$；

当 $n\geq2$ 时，$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+4(n-1)$ ②；

①－②得：$a_n^2-a_{n-1}^2+4=4a_n$，

整理得 $a_n-a_{n-1}=2$（常数），

故数列$\{a_n\}$是以 2 为首项，2 为公差的等差数列；

所以 $a_n=2+2(n-1)=2n$；

（2）由于 $a_n=2n$，

所以 $S_n=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$．

故 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$．

（3）由（1）得：$c_n=(-1)^na_n=(-1)^n\cdot2n$，

所以当 n 为偶数时，$P_n=c_1+c_2+...+c_{n-1}+c_n=\frac{n}{2}\times 2=n$；$n$ 的最小值为 48；------------9 分

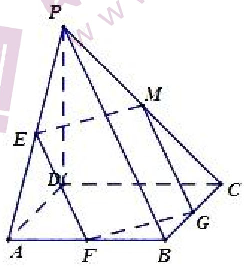
当 n 为奇数时，$P_n=c_1+c_2+...+c_{n-1}+c_n=\frac{n-1}{2}\times 2-2n=-n-1$，不存在最小的 n 值.

故当 n 为 48 时，满足条件. --12 分

18.如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$底面 $ABCD$，$PD=AD=2$，点 E，F，G 分别为 PA，AB，BC 的中点，平面 $EFGM\cap$棱 $PC=M$.

（Ⅰ）试确定$\frac{PM}{PC}$的值，并证明你的结论；

（Ⅱ）求平面 $EFGM$ 与平面 PAD 夹角的余弦值.



【解答】证明：(Ⅰ) $\frac{PM}{PC}=\frac{1}{2}$.

在△APB 中，因为点 E，F 分别为 PA，AB 的中点，所以 $EF\parallel PB$.

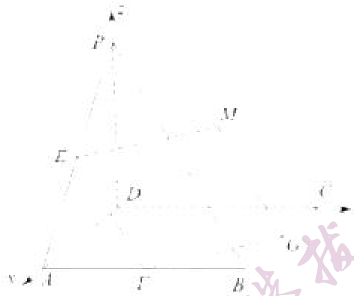
又 $EF\not\subset$平面 PBC，$PB\subset$平面 PBC， 所以 $EF\parallel$平面 PBC.

因为 $EF\subset$平面 EFG，平面 $EFG\cap$平面 $PBC=GM$，

所以 $EF\parallel GM$. 所以 $PB\parallel GM$.

在△PBC 中，因为点 G 为 BC 的中点，

所以点 M 为 PC 的中点，即 $\frac{PM}{PC}=\frac{1}{2}$.



(Ⅱ) 因为底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD\perp CD$.

因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD$，$PD\perp CD$.

如图，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 D (0, 0, 0)，A (2, 0, 0)，B (2, 2, 0)，C (0, 2, 0)，P (0, 0, 2)，

因为 E，F，G 分别为 PA，AB，BC 的中点，

所以 E (1, 0, 1)，F (2, 1, 0)，G (1, 2, 0).

所以$\overrightarrow{EF}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{FG}=(-1,\ 1,\ 0)$.

设平面 $EFGM$ 的法向量$\overrightarrow{n}=(x,\ y,\ z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{FG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y-z=0,\\ -x+y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，$y=1$，$z=2$，于是$\overrightarrow{n}=(1,\ 1,\ 2)$. 又因为平面 PAD 的法向量为$\overrightarrow{m}=(0,\ 1,\ 0)$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{m},\ \overrightarrow{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面 $EFGM$ 与平面 PAD 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

19.接种新冠疫苗，可以有效降低感染新冠肺炎的几率，某地区有 A，B，C 三种新冠疫苗可供居民接种，假设在某

个时间段该地区集中接种第一针疫苗，而且这三种疫苗的供应都很充足．为了节省时间和维持良好的接种秩序，接种点设置了号码机，号码机可以随机地产生 A，B，C 三种号码（产生每个号码的可能性都相等），前去接种第一针疫苗的居民先从号码机上取一张号码，然后去接种与号码相对应的疫苗（例如：取到号码 A，就接种 A 种疫苗，以此类推）．若甲，乙，丙，丁四个人各自独立的去接种第一针新冠疫苗．

(1)求这四个人中恰有 2 个人接种 A 种疫苗的概率；

(2)记甲，乙，丙，丁四个人中接种疫苗的种数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

【答案】(1) $\frac{8}{27}$ (2)分布列见解析；期望为 $\frac{65}{27}$

解答：(1)依题意所有可能的接种方式有 3^4 种，

恰有 2 人接种 A 疫苗的情况有 $C_4^2 \cdot 2^2$ 种，

从而恰有 2 人接种 A 种疫苗的概率为 $\frac{C_4^2 \cdot 2^2}{3^4}=\frac{8}{27}$．

(2)依题意 X 的可能值为 1，2，3，

又 $P(X=1)=\frac{3}{3^4}=\frac{1}{27}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2\left(C_2^1C_4^3+C_4^2C_2^2\right)}{3^4}=\frac{14}{27}$（或 $P(X=2)=\frac{C_3^2\left(2^4-2\right)}{3^4}=\frac{14}{27}$），$P(X=3)=\frac{C_3^1C_4^2C_2^1}{3^4}=\frac{4}{9}$

（或 $P(X=3)=\frac{C_4^2A_3^3}{3^4}=\frac{4}{9}$）．

综上知，X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{4}{9}$

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{27}+2\times\frac{14}{27}+3\times\frac{4}{9}=\frac{65}{27}$．

20.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个焦点与短轴的两个端点组成的三角形是等腰直角三角形，点 $P(\sqrt{10}$，1）是椭圆 C 上一点．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设 R（s，t）是椭圆 C 上的一动点，由原点 O 向（$x-s$）^{2}+（$y-t$）^{2}=4 引两条切线，分别交椭圆 C 于点 P，Q，若直线 OP，OQ 的斜率均存在，并分别记为 k_1，k_2，求证：$k_1 \cdot k_2$ 为定值．

【解答】（1）解：因为椭圆的一个焦点与短轴的两个端点组成的三角形是等腰直角三角形，

所以 $c=\frac{1}{2}\times 2b=b$，所以 $a=\sqrt{2}b$，

又点 P（$\sqrt{10}$，1）是椭圆 C 上一点，

所以 $\frac{10}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，所以 $a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}$，故椭圆 C 的方程为C：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$．

（2）证明：设直线 OP：$y=k_1x$，直线 OQ：$y=k_2x$，

又直线 OP 为圆 R 的切线，所以 $\frac{|k_1s-t|}{\sqrt{k_1^2+1}}=2$，化简得 $(s^2-4)k_1^2-2stk_1+t^2-4=0$，

同理可得 $(s^2-4)k_2^2-2stk_2+t^2-4=0$，

故 k_1，k_2 是方程 $(s^2-4)k^2-2stk+t^2-4=0$ 的两根，由 $(s^2-4)\neq0$，$\Delta>0$，可知 $k_1\cdot k_2=\frac{t^2-4}{s^2-4}$，

因为 $R(s,t)$ 在椭圆上，所以 $t^2=6-\frac{1}{2}s^2$，所以 $k_1\cdot k_2=\frac{t^2-4}{s^2-4}=\frac{2-\frac{1}{2}s^2}{s^2-4}=-\frac{1}{2}$，

故 $k_1\cdot k_2$ 为定值 $-\frac{1}{2}$．

21.已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-3x$．

(1)若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-2$，求函数 $f(x)$ 的极小值；

(2)若 $a=1$，对于任意 $x_1,x_2\in[1,2]$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)-f(x_2)>\frac{m(x_2-x_1)}{x_1x_2}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

【答案】(1) -2　(2) $(-\infty,-6]$

解析(1)因为 $f(x)=\ln x+ax^2-3x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-3$．

由函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-2$，

得 $f'(1)=1+2a-3=0$，解得 $a=1$．

此时 $f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$．

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$f'(x)<0$．

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，

所以当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1)=\ln1+1-3=-2$．

(2)由 $a=1$ 得 $f(x)=\ln x+x^2-3x$．

因为对于任意 $x_1,x_2\in[1,2]$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>\frac{m(x_2-x_1)}{x_1x_2}$ 恒成立，

所以对于任意 $x_1,x_2\in[1,2]$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-\frac{m}{x_1}>f(x_2)-\frac{m}{x_2}$ 恒成立，

所以函数 $y=f(x)-\frac{m}{x}$ 在 $[1,2]$ 上单调递减．

令 $h(x)=f(x)-\dfrac{m}{x}=\ln x+x^2-3x-\dfrac{m}{x}$， $x\in[1,2]$，

所以 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3+\dfrac{m}{x^2}\le 0$ 在[1，2]上恒成立，

则 $m\le -2x^3+3x^2-x$ 在[1，2]上恒成立．

设 $F(x)=-2x^3+3x^2-x(1\le x\le 2)$，

则 $F'(x)=-6x^2+6x-1=-6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$．

当 $x\in[1,2]$ 时， $F'(x)<0$，所以函数 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，

所以 $F(x)\ge F(2)=-6$，

所以 $m\le -6$，故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-6]$．

22.在平面直角坐标系 xOy 中，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线 l 过点 A（－1，0），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$．

（1）写出直线 l 的一个参数方程及曲线 C 的直角坐标方程；

（2）若 l 与 C 交于 M，N 两点，求 $\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|AN|}$ 的值．

【解答】 解：（1）倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线 l 过点 A（－1，0），转换为参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）；

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，根据 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ x^2+y^2=\rho^2\end{cases}$，转换为直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4$；

（2）把直线参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）代入 $x^2+(y-2)^2=4$，

得到：$t^2-(2\sqrt{3}+1)t+1=0$，

整理得 $t_1+t_2=2\sqrt{3}+1$，$t_1t_2=1$；

所以 $\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|AN|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=2\sqrt{3}+1$．

23.已知函数 $f(x)=|x+2|+|x-1|$．

（1）求不等式 $f(x)>3$ 的解集；

（2）若 $f(x)$ 的最小值为 m，且对任意正数 a，b 满足 $a+b=m$，求 $\frac{m+1}{a+1}+\frac{1}{b}$ 的最小值．

【解答】解（1）$f(x)=|x+2|+|x-1|$，

当 $x\leqslant-2$ 时，不等式变为 $-1-2x>3$，解得 $x<-2$，

当 $-2<x\leqslant1$ 时，不等式变为 $3>3$，无解，

当 $x>1$ 时，不等式变为 $2x+1>3$．解得 $x>1$，

故不等式 $f(x)>3$ 的解集为 $\{x|x>1$ 或 $x<-2\}$．

（2）由（1）知 $f(x)$ 的最小值为 3，

所以 $a+b=3$，则 $(a+1)+b=4$，

$\frac{m+1}{a+1}+\frac{1}{b}=\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b}$

$=\frac{1}{4}[(a+1)+b](\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b})$

$=\frac{1}{4}(5+\frac{4b}{a+1}+\frac{a+1}{b})\geqslant\frac{1}{4}(5+2\sqrt{\frac{4b}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b}})=\frac{9}{4}$，

当且仅当即 $a=\frac{5}{3}$，$b=\frac{4}{3}$ 时，等号成立，

所以 $\frac{m+1}{a+1}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$．