中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 11 月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．$\bar{z}$ 是 $z=\dfrac{1+2i}{1-i}$ 的共轭复数，则 $\bar{z}$ 的虚部为（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

2．全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|y=\log_{2018}(x-1)\}$，集合 $B=\{y|y=\sqrt{x^2+4x+8}\}$，则 $A\cap(C_U B)=$（　　）

A．[1,2]　　B．[1,2)　　C．(1,2]　　D．(1,2)

3．设 p：角 α 是钝角，设 q：角 α 满足 $\alpha>\dfrac{\pi}{2}$，则 p 是 q 的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_4=4$，$S_5=15$，则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 2018 项和为（　　）

A．$\dfrac{2018}{2019}$　　B．$\dfrac{2016}{2018}$　　C．$\dfrac{2016}{2017}$　　D．$\dfrac{2019}{2018}$

5. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x\ln(-x)-x-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=e$ 处的切线方程为（　　）

A．$y=2x+1$　　B．$y=x-e$　　C．$y=-2x+2e+1$　　D．$y=x-e+1$

6．在 $[-5,5]$ 上随机取一个实数 m，能使函数 $f(x)=x^2+\sqrt{2}mx+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上有零点的概率为（　　）

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．$\dfrac{3}{10}$

7. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 M 在 E 上，MF_1 与 x 轴垂直，$\sin\angle MF_2F_1=\dfrac{1}{4}$，

则 E 的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　D．2

8．已知 $\triangle ABC$ 是边长为 $2a\,(a>0)$ 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是（　　）

A．$-2a^2$　　B．$-\dfrac{3}{2}a^2$　　C．$-\dfrac{4}{3}a^2$　　D．$-a^2$

9．设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 上一点，M,N 分别是两圆：$(x+12)^2+y^2=1$ 和 $(x-12)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值、最大值分别为（　　）

A．18，24　　B．16，22　　C．24，28　　D．20，26

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ \log_3 x, & x>0\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))+1$ 的零点的个数是（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

11．在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $\sin(A+C+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $a+c=2$，则 $\triangle ABC$ 周长的取值范围是（　　）

A．(2,3]　　B．$[2+\sqrt{3},4)$　　C．(4,5]　　D．[5,6)

12．点 A,B,C,D 在同一个球的球面上，$AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，若四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 $\dfrac{4}{3}$，则这个球的表面积为（　　）

A．$\dfrac{125\pi}{16}$　　B．8π　　C．$\dfrac{25\pi}{16}$　　D．$\dfrac{289\pi}{16}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-7\le 0\\ x-3y+1\le 0\\ 3x-y-5\ge 0\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最小值为__________．

14．每年的 9 月初是高校新生到校报道的时间，此时学生会将组织师兄师姐做好迎新接待工作，若某学院只有 3 位师兄在迎新现场，突然来了 4 位新生,要求一次性派发完迎新指引工作（可以有 1 位师兄接待 2 位新生），则安排方案有_________种．（用数字作答）

15．数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$，且 $a_{n+1}=3a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$．令 $b_n=\log_3(a_n+1)$，则 $\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{2018}}{2018}=$______．

16．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若对任意实数 x，有 $f(x)>f'(x)$，且 $f(x)+\pi^{2018}$ 为奇函数，则

不等式 $f(x)+\pi^{2018}e^{x}<0$ 的解集是__________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

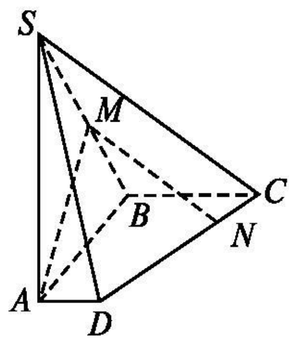
（一）必考题：60 分．

17．（10 分）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\dfrac{2\sin B-\sin A}{\sin C}$．

（1）求角 C 的值；

（2）若 $a+b=4$，当边 c 取最小值时，求 $\triangle ABC$ 的面积．

18．（14 分）如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，侧棱 $SA\perp$ 底面 $ABCD$，AB 垂直于 AD 和 BC，M 为棱 SB 上的点，$SA=AB=BC=2$，$AD=1$．



（1）若 M 为棱 SB 的中点，求证：$AM//$ 平面 SCD；

（2）当 $SM=2MB$ 时，求平面 AMC 与平面 SAB 所成的锐二面角的余弦值；

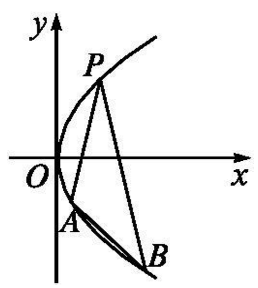
（3）在第（2）问条件下，设点 N 是线段 CD 上的动点，MN 与平面 SAB 所成的角为 θ，求当 $\sin\theta$ 取最大值时点 N 的位置．

19．（10 分）网约车的兴起,丰富了民众出行的选择,为民众出行提供便利的同时也解决了很多劳动力的就业问题，据某著名网约车公司“滴*打车”官网显示，截止目前,该公司已经累计解决退伍军人转业为兼职或专职司机三百多万人次.梁某即为此类网约车司机，据梁某自己统计某一天出车一次的总路程数可能的取值是 20、22、24、26、28、30(km)，它们出现的概率依次是 0.1、0.2、0.3、0.1、t、$2t$．

（1）求这一天中梁某一次行驶路程 X 的分布列，并求 X 的均值和方差；

（2）网约车计费细则如下：起步价为 5 元，行驶路程不超过 3 km 时，租车费为 5 元，若行驶路程超过 3 km，则按每超出 1 km（不足 1 km 也按 1 km 计程）收费 3 元计费．依据以上条件，计算梁某一天中出车一次收入的均值和方差．

20．（14 分）如图,过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 $P(1,1)$，作两条直线分别交抛物线于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，若 PA 与 PB 的斜率满足 $k_{PA}+k_{PB}=0$．



（1）证明:直线 AB 的斜率为定值，并求出该定值；

（2）若直线 AB 在 y 轴上的截距 $b\in[0,1]$，求 ΔABP 面积的最大值．

21．（12 分）已知函数 $f(x)=2x(\ln x+1)$

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间．

（2）若斜率为 k 的直线与曲线 $y=f'(x)$ 交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，其中 $x_1<x_2$．

求证：$x_1<\dfrac{2}{k}<x_2$．

选考题：共 10 分．请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．[选修 4−4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2-4=0(a>0)$．

（1）若直线 l 与圆 C_1 相切，求 a 的值；

（2）若直线 l 与曲线 C_2: $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），交于 A, B 两点，点 $C(2,1)$，求 $|AC|+|BC|$．

23．[选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+1|+|3x+a|$，若 $f(x)$ 的最小值为 1．

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $a>0$，且 m,n 均为正实数，且满足 $m+n=\dfrac{a}{2}$，求 m^2+n^2 的最小值．