

一、选择题

1. C. 【解析】 $\left|1 - \frac{x-1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, 即 $\left|\frac{3-x}{2}\right| < \frac{1}{2}$, 等价于

$|x-3| < 1$, 解得 $-1 < x-3 < 1$, 即 $2 < x < 4$, 则 $A = (2, 4)$. $B = \{x | x^2 - 7x + 10 \geq 0\} = \{x | (x-2)(x-5) \geq 0\} = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$, $\complement_R B = (2, 5)$, $A \cap \complement_R B = (2, 4)$, 故 C 正确.

2. D. 【解析】 $z = (1-2i)(a+i) = a+2+(1-2a)i$ 由已知得 $a+2+1-2a=0$, 解得 $a=3$.

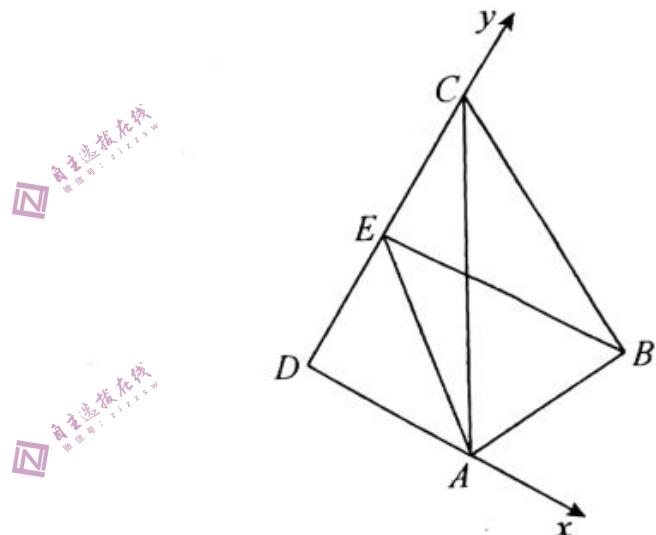
3. C. 【解析】连接 BD , 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理知

$$BD^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3, \text{ 所以 } BD = \sqrt{3}.$$

由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin 120^\circ} = 2 = AC$, 所以 AC 为圆的直径,

所以 $CD \perp AD$, 所以 $CD = \sqrt{3}$. 从而 $CD = BD$, 又

$\angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, 所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形. 以 D 为原点, 以 DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系.



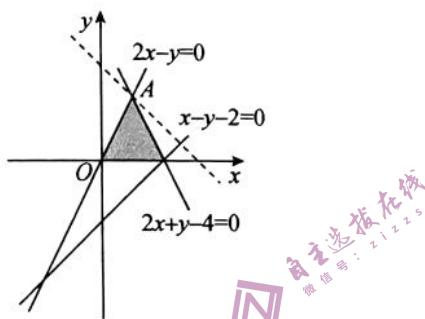
则 $A(1, 0)$, $E\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}$.

4. D. 【解析】甲景点的月收入的中位数为 $\frac{33+34}{2}=33.5$,

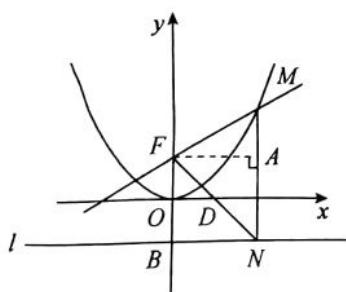
乙景点的月收入的中位数为 $\frac{31+32}{2}=31.5$, 故 A 不正

确; 甲景点的月收入的平均数为 33, 乙景点的月收入的平均数为 33, 故 B 不正确; 甲景点的月收入的极差为 $49-20=29$, 乙景点的月收入的极差为 $56-17=39$, 故 C 不正确; 观察茎叶图可知, 甲景点的月收入的方差小于乙景点的月收入的方差, D 选项正确.

5. C. 【解析】作出可行域如图中阴影部分所示. 当直线 $y=-x+z$ 经过点 $A(1, 2)$ 时, 截距 z 最大, 则 $z_{\max}=1+2=3$.



6. A. 【解析】如图所示, 过点 F 作 $FA \perp MN$, 垂足为 A . 由题得 $\angle AFM=30^\circ$, 所以 $\angle NMF=60^\circ$. 因为 $|MF|=|MN|$, 所以 $\triangle MNF$ 是等边三角形. 因为 $MN \parallel OF$, 所以 $\angle OFD=\angle MNF=60^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle OFD$ 中, $|FD|=\frac{|OF|}{\cos\angle OFD}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.



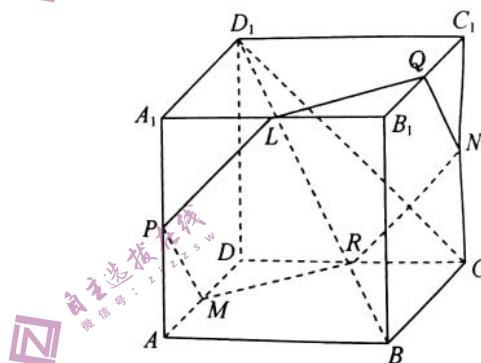
7. B. 【解析】执行第一次循环, 得 $c=2, a=1, b=2, s=4, n=3$; 执行第二次循环, 得 $c=3, a=2, b=3, s=7, n=4$; 执行第三次循环, 得 $c=5, a=3, b=5, s=12, n=5$; 执行第四次循环, 得 $c=8, a=5, b=8, s=20$,

$n=6$; 执行第五次循环, 得 $c=13, a=8, b=13, s=33, n=7$. 因为 $33>30$, 所以退出循环, 输出 $n-1=6$.

8. B. 【解析】由题图知, $f\left(-\frac{4\pi}{9}\right)=0$, 则 $-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\omega=-\frac{3+9k}{4} (k \in \mathbf{Z})$. 设 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 T , 易知 $T<2\pi<2T$,

则 $\frac{2\pi}{|\omega|}<2\pi<\frac{4\pi}{|\omega|}$, 所以 $1<|\omega|<2$, 当且仅当 $k=-1$ 时, 符合题意, 此时 $\omega=\frac{3}{2}$.

9. A. 【解析】设棱 AA_1, CD, B_1C_1 的中点分别为 P, R, Q , 平面 LMN 即为平面 $PMRNQL$, 如图所示, 易证 $BD_1 \perp$ 平面 $PMRNQL$, $BD_1 \subset$ 平面 CBD_1 , 故平面 $CBD_1 \perp$ 平面 LMN .



10. D. 【解析】把该马每天行走的里程数按行走时间的先后顺序排成一列, 则它是首项为 $a_1=1$, 公比为 $q=\frac{1}{2}$ 的等比数列, 记为 $\{a_n\}$, 则 $\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{1-\frac{1}{2}}=700$, 解得

$$a_1=\frac{2^7 \times 350}{127}.$$

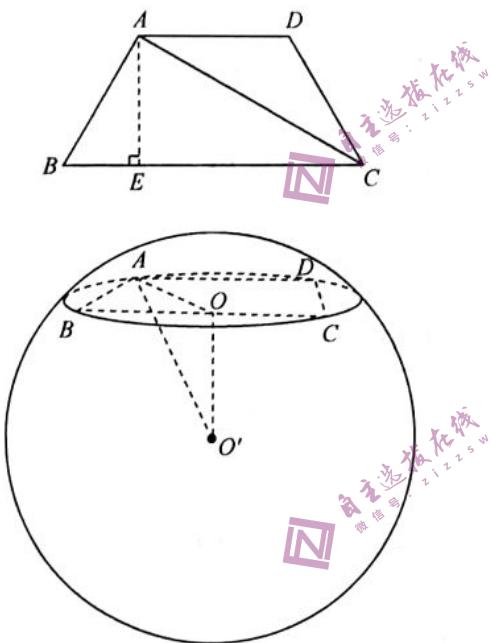
故该马第五天行走的里程数为 $a_5=$

$$a_1 \cdot \frac{1}{2^4}=\frac{2^7 \times 350}{127} \times \frac{1}{2^4}=\frac{2800}{127} \approx 22.05.$$

11. A. 【解析】由题意得 $f(x)=\sqrt{2} \sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$, $g(x)=\sqrt{2} \cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$. 令 $t=\omega x+\frac{\pi}{4}$, 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\omega}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$. 因为在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上, $f(x)$ 为增

函数, $g(x)$ 为减函数, 所以 $\begin{cases} \frac{\omega}{2}\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega}{2}\pi + \frac{\pi}{4} \leq \pi, \end{cases}$ 解得 $\omega \leq \frac{1}{2}$, 所以 $0 < \omega \leq \frac{1}{2}$.

12. C. 【解析】因为四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $BC = 4$, $\angle ABC = 60^\circ$, 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为 E , 则 $BE = 1$, 所以 $AB = 2BE = 2$, $AE = \sqrt{3}$, $EC = 3$. 在 $\triangle AEC$ 中, $AC^2 = AE^2 + EC^2 = 12$, 所以 $BC^2 = AB^2 + AC^2$, 即 $\angle BAC = 90^\circ$. 同理可得 $\angle BDC = 90^\circ$. 所以四边形 $ABCD$ 的外接圆的直径为 $BC = 4 = 2r$, $r = 2$. 设球心为 O' , 四边形 $ABCD$ 的外接圆圆心为 O , 如图所示.



在 $Rt\triangle AOO'$ 中, $AO'^2 = AO^2 + OO'^2$, 即 $4^2 = 2^2 + OO'^2$, 解得 $OO' = 2\sqrt{3}$. 又因为四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 的面积为定值, 所以当高最大时体积最大, 其高最大为 $SO' + OO' = 2\sqrt{3} + 4$.

二、填空题

13. -2. 【解析】由题意得 $a_1 + a_2 = -4$. 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $(a_2 + a_3) - (a_1 + a_2) = 2d = -4$, 所以 $d = -2$.

14. $\frac{9}{10}$. 【解析】从 5 名志愿者中任选 3 人, 共有 $C_5^3 = 10$ 种选法; 男性志愿者和女性志愿者都有人选, 分为 2 男 1 女和 2 女 1 男两种情况, 共有 $C_3^2 C_2^1 + C_3^1 C_2^2 = 9$ 种选法, 因而所求的概率 $P = \frac{9}{10}$.

15. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$, 或 $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 5$, 或 $(x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, 或 $(x+4)^2 + y^2 = 25$ (写出一个即可).

【解析】令 $y = 0$, 则 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 解得 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, 不妨设 $A(1, 0)$, $B(-3, 0)$; 令 $x = 0$, 得 $y = -3$, 则 $C(0, -3)$; 抛物线的顶点 P 的坐标为 $(-1, -4)$. 设所求圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$). 当圆过 A, B, C 三点时,

$$\begin{cases} 1+D+F=0, \\ 9-3D+F=0, \\ 9-3E+F=0, \end{cases} \quad \begin{cases} D=2, \\ E=2, \\ F=-3, \end{cases}$$

$y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$. 当圆过 B, C, P 三点时,

$$\begin{cases} 9-3D+F=0, \\ 9-3E+F=0, \\ 1+16-D-4E+F=0, \end{cases} \quad \begin{cases} D=4, \\ E=4, \\ F=3, \end{cases}$$

为 $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$. 当圆过 A, B, P 三点时,

$$\begin{cases} 1+D+F=0, \\ 9-3D+F=0, \\ 1+16-D-4E+F=0, \end{cases} \quad \begin{cases} D=2, \\ E=3, \\ F=-3, \end{cases}$$

程为 $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$. 当圆过 A, C, P 三点

$$\begin{cases} 1+D+F=0, \\ 9-3E+F=0, \\ 1+16-D-4E+F=0, \end{cases} \quad \begin{cases} D=8, \\ E=0, \\ F=-9, \end{cases}$$

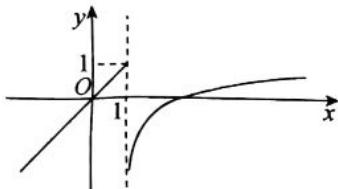
方程为 $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$.

16. $(-\infty, 1]$. 【解析】当 $x \leq 0$ 时, $e^x > 0$, $f(f(x)) = \ln e^x = x$; 当 $0 < x \leq 1$ 时, $\ln x \leq 0$, $f(f(x)) = e^{\ln x} = x$; 当 $x > 1$ 时, $\ln x > 0$, $f(f(x)) = \ln(\ln x)$, 则 $h(x) =$

$$f(f(x)) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ \ln(\ln x), & x > 1. \end{cases}$$

函数 $y = \ln(\ln x)$ 的定义

域为 $(1, +\infty)$, 由复合函数单调性可知函数 $y = \ln(\ln x)$ 单调递增. 当 $x = e$ 时, $y = 0$; 当 x 从 1 的右侧趋向于 1 时, y 趋向于 $-\infty$; 当 x 趋向于 $+\infty$ 时, y 趋向于 $+\infty$. 作出 $h(x)$ 的图象如图所示. $g(x)$ 的零点个数即为曲线 $h(x)$ 与 $y = a$ 的交点个数, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.



三、解答题

17. (1) 解: 因为 $\sin B = 2 \sin C$, 所以由正弦定理可得 $b = 2c$.

因为 $a = 2b \cos B$, 所以由余弦定理可得 $a^2 = 2b^2 \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. (3 分)

两式联立, 整理得 $a^2 = 6c^2$, 即 $a = \sqrt{6}c$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2c)^2 + c^2 - (\sqrt{6}c)^2}{2 \cdot (2c) \cdot c} = -\frac{1}{4}$. (5 分)

(2) 证明: 因为 $a = 2b \cos B$, 由正弦定理可得 $\sin A = 2 \sin B \cos B$.

因为 $A = \pi - (B+C)$, 所以 $\sin A = \sin(B+C)$.

则 $\sin(B+C) = 2 \sin B \cos B$.

所以 $\sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin B \cos B$. (9 分)

由 $\sin B = 2 \sin C$,

得 $\sin B \cos C + \cos B \sin C = 4 \sin C \cos B$,

即 $\sin B \cos C = 3 \sin C \cos B$,

则 $\sin B \cos C - \cos B \sin C = 2 \sin C \cos B$.

所以 $\sin(B-C) = 2 \cos B \sin C$. (12 分)

18. (1) 证明: 如图, 取 BC 的中点 E , 连接 DE , PE .

又 D 为 AB 的中点,

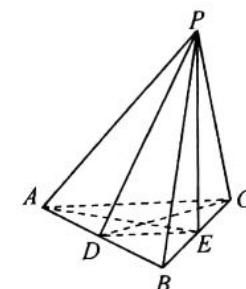
所以 $DE \parallel AC$.

又 $\angle ACB = 90^\circ$, 则 $DE \perp BC$. (2 分)

因为 $PB = PC$, 所以 $PE \perp BC$.

又因为 $DE \cap PE = E$, 所以 $BC \perp$ 平面 PDE .

因为 $PD \subset$ 平面 PDE , 所以 $BC \perp PD$. (5 分)



(2) 解: 如图, 连接 AE ,

因为 $AC = BC = 1$, $\angle ACB = 90^\circ$,

N 所以 $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

因为 $PB = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以 $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 1$.

在 $\triangle PAE$ 中, $AE = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $PE = 1$, $PA = \frac{3}{2}$,

N 所以 $AE^2 + PE^2 = PA^2$, 所以 $PE \perp AE$. (9 分)

又 $PE \perp BC$, $AE \cap BC = E$,

所以 $PE \perp$ 平面 ABC . (10 分)

则三棱锥 $P-ACD$ 的体积 $V_{\text{三棱锥 } P-ACD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ADC} \times$

$$PE = \frac{1}{12}.$$
(12 分)

19. 解: (1) $\sum_{i=1}^6 y_i = 5724$, $\bar{y} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 y_i = 954$,

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 3.5.$$
(2 分)

$$\text{又 } \sqrt{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sqrt{70}}{2}, \sqrt{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2} = 200\sqrt{70},$$

$$\text{则样本相关系数 } r = \frac{26734 - 6 \times 954 \times 3.5}{\frac{\sqrt{70}}{2} \times 200\sqrt{70}} = \frac{6700}{7000} \approx 0.96.$$

(5 分)

因为样本相关系数 $r \approx 0.96 > 0.75$, 所以 y 与 x 具有较强的相关性, 且正相关. (6分)

(2) 设 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 其中

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \bar{x}^2} = \frac{26734 - 6 \times 3.5 \times 954}{\left(\frac{\sqrt{70}}{2}\right)^2} \approx 382.86,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 954 - 382.86 \times 3.5 \approx -386.01, \quad (10 \text{ 分})$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 382.86x - 386.01$.

把 $x = 8$ 代入得 $\hat{y} \approx 2676.9$ (亿元).

故据此预测 2023 年中国人工智能教育市场规模将达到约 2676.9 亿元. (12 分)

20. 解: (1) $f'(x) = e^x - a$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 即 $e^x - a \geq 0$, 所以 $a \leq e^x$. (2 分)

当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, 所以 $a \leq 1$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$. (4 分)

(2) 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(-1) = \frac{1}{e} > 0$.

由 $f(x)$ 存在零点且零点的绝对值小于 2, 可得 $f(-2) = e^{-2} + a < 0$,

故 $a < -\frac{1}{e^2}$. (6 分)

若 $a > 0$, 令 $f'(x) = e^x - a = 0$, 解得 $x = \ln a$.

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

因为 $f(x)$ 存在零点, 所以 $f(\ln a) = -a \ln a \leq 0$,

即 $a \ln a \geq 0$.

又 $a > 0$, 所以 $\ln a \geq 0$, $a \geq 1$. (8 分)

当 $a = 1$ 时, $f(0) = 0$, 满足题意.

当 $a > 1$ 时, $f(-1) = \frac{1}{e} > 0$, 且当 x 趋向于正无穷

时, $f(x)$ 趋向于正无穷, 此时 $f(x)$ 存在两个零点, 分

别设为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

因为 $f(0) = 1 - a < 0$, 所以 $-1 < x_1 < 0$.

由题意知 $x_2 < 2$, 则 $f(2) = e^2 - 3a > 0$, 即 $a < \frac{e^2}{3}$. 故

$$1 < a < \frac{e^2}{3}.$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{e^2}) \cup [1, \frac{e^2}{3}]$. (12 分)

21. (1) 解: 设 E 的方程为 $Ax^2 + By^2 = 1$ ($A > 0, B > 0$),

$$A \neq B, \text{ 则 } \begin{cases} 4A = 1, \\ A + \frac{3}{4}B = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A = \frac{1}{4}, \\ B = 1, \end{cases}$$

$$\text{所以 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 证明: 由题意可知直线 MQ 的斜率存在且不为 0, 设 MQ 的方程为 $x = my + 1$ ($m \neq 0$), 点 $C(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$, $N(x_2, -y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (m^2 + 4)y^2 + 2my - 3 = 0, \Delta = 16m^2 + 48 > 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 4}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$k_{NC} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}, \text{ 所以 } NC \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x = x_1 - \frac{y_1(x_1 - x_2)}{y_1 + y_2} = \frac{y_2 x_1 + x_2 y_1}{y_1 + y_2} = \frac{y_2(my_1 + 1) + (my_2 + 1)y_1}{y_1 + y_2} = 4. \quad (8 \text{ 分})$$

所以直线 NC 恒过定点 $(4, 0)$. (9 分)

又因为 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{NC} = 0$, 所以 $QP \perp NC$, 记点 $(4, 0)$ 为 H , 则点 P 在以 QH 为直径的圆上, 从而 QH 的中点

$$R\left(\frac{5}{2}, 0\right), \text{ 使 } |PR| \text{ 为定值 } \frac{3}{2}. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 解: (1) 因为 $-1 < \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$, 且 $y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 =$

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1,$$

所以 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \neq -1)$. (3 分)

因为 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$ 所以 l 的直角坐标方程为 $2x + 3y - a = 0$. (5 分)

(2) 由(1)可设 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参

数, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$).

$a = 2x + 3y = 4\cos \alpha + 3\sin \alpha = 5\sin(\alpha + \varphi)$, 其中

$$\tan \varphi = \frac{4}{3} \left(\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right). \quad (8 \text{ 分})$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 时, a 取得最大值 5; 当 $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \varphi$ 时, a

取得最小值 -5. (9 分)

所以实数 a 的取值范围为 $[-5, 5]$. (10 分)

23. 解: (1) $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) = \left(\frac{a+b+c}{a}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{b}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{c}-1\right)$

$$= \frac{b+c}{a} \times \frac{a+c}{b} \times \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \times \frac{2\sqrt{ac}}{b} \times \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8, \text{ 当且仅当 } a = b = c.$$

$b=c=\frac{1}{3}$ 时, 等号成立.

所以 $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$ 的最小值为 8. (5 分)

$$(2) \text{ 法 1: } [(a-1)+(b+1)+(c+2)]^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2 + 2[(a-1)(b+1) + (b+1)(c+2) + (c+2)(a-1)] \leq 3[(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2], \quad (8 \text{ 分})$$

故由已知得 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2 \geq \frac{9}{3} = 3$, 当且仅当 $a=2, b=0, c=-1$ 时, 等号成立.

所以 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2$ 的最小值为 3. (10 分)

$$\text{法 2: } [(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq [(a-1) + (b+1) + (c+2)]^2 = (a+b+c+2)^2 = 9, \quad (8 \text{ 分})$$

故 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2 \geq \frac{9}{3} = 3$, 当且仅当 $a=2, b=0, c=-1$ 时, 等号成立.

所以 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2$ 的最小值为 3. (10 分)