参照秘密级管理★启用前

2022−2023 学年度部分学校高三教学质量摸底检测

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．A；2．C；3．B；4．B；5．C；6．A；7．C；8．D．

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．BC；10．AD；11．BD；12．ABC．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-8；14．$\dfrac{1}{7}$；15．-1或3；16．$-\dfrac{48}{25}$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）解：（1）根据表中数据可知，

调查的500位居民中有70位有疾病A病历， ……………………1 分

因此该地区居民中，有疾病A病历的比例值为$\dfrac{70}{500}=14\%$；

所以估计该地区居民中，有疾病A病历的比例值为14% ……………………3 分

（注：“比例值为$\dfrac{7}{50}$”给“3 分得分点”）．

（2）零假设为 H_0：生活习惯B与患某种疾病A无关联；

根据列联表中的数据，经计算得到：

$$\chi^2=\frac{500\times(40\times270-30\times160)^2}{200\times300\times70\times430}\approx9.967$$ ……………………………6 分

由于$9.967>6.635=x_{0.01}$， ………………………………………………8 分

（注：χ^2数值足以判断“$>6.635=x_{0.01}$”成立即可得“6 分、8 分”得分点，若未

计算 χ^2 的数值，直接给出判断也可得分）.

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的 χ^2 独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为生活习惯 B 与患某种疾病 A 有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.01． ………………10 分

18．（12 分）解：（1）设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，

由 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，

得 $ac\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+2bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=ab\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， …………………2 分

化简可得 $a=\sqrt{2}c$． ………………………………………………4 分

由正弦定理，得：$\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{a}{c}=\sqrt{2}$． ………………………………………………5 分

（2）方法①：由正弦定理，得：$2\sin A\cdot\cos C=2\sin B-\sin C$， ………6 分

又 $\sin B=\sin(A+C)$，

所以 $2\sin A\cdot\cos C=2\sin A\cdot\cos C+2\cos A\cdot\sin C-\sin C$，

即：$2\cos A\cdot\sin C=\sin C$

又 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$ ………………8 分

由（1）得：$\sin C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$，由 $\sin A>\sin C$，得：$A>C$

所以 $\cos C=\sqrt{1-\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$， ………………………………………………10 分

所以 $\cos B=-\cos(A+C)=-(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}})=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}$ ………12 分

方法②：由余弦定理，得：$2a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2b-c$， ………………6 分

化简，得：$b^2+c^2-a^2=bc$

所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$ ………………………………8 分

（以下同方法①）

方法③：由余弦定理，得：$2a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2b-c$， ………………6 分

化简，得：$b^2+c^2-a^2=bc$，

由（1）知：$a=\sqrt{2}c$，所以 $b^2-c^2=bc$，

两边同除以 c^2，得：$(\frac{b}{c})^2-\frac{b}{c}-1=0$，解得 $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}c$ ……………9 分

由余弦定理，得：$\cos B=\dfrac{(\sqrt{2}c)^2+c^2-(\frac{1+\sqrt{5}}{2}c)^2}{2\sqrt{2}c\cdot c}=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}$ …………12 分

19.（12 分）解：（1）当 $a=3$ 时，$f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x-\frac{1}{2}$，

$f'(x)=3x^2+5x-2$， ……………………………………………………1 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $f'(1)=6$，…………………2 分

又 $f(1)=1+\frac{5}{2}-2-\frac{1}{2}=1$， ………………………………………………3 分

$y=6(x-1)+1$，

整理可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $6x-y-5=0$；…………4 分

（切线方程一般式、斜截式均可得“4 分”得分点）

（2）$f'(x)=ax^2+(2a-1)x-2=(ax-1)(x+2)$， ………5 分

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，

$x\in(-\infty,\frac{1}{a})$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(\frac{1}{a},-2)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(-2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$；

$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 和 $(-2,+\infty)$ 单调递减，在 $(\frac{1}{a},-2)$ 单调递增， ……7 分

当 $a=-\frac{1}{2}$，$f'(x)\le 0$，$f(x)$ 在 R 上为减函数， …………9 分

当 $a<-\frac{1}{2}$，

$x\in(-\infty,-2)$时，$f'(x)<0$；$x\in(-2,\dfrac{1}{a})$时，$f'(x)>0$；$x\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$；

$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递减，在 $(-2,\dfrac{1}{a})$ 单调递增，　　　………11 分

综上所述：

当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{a})$ 和 $(-2,+\infty)$ 单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},-2)$ 单调递增，

当 $a=-\dfrac{1}{2}$，$f'(x)\le 0$，$f(x)$ 在 R 上为减函数，

当 $a<-\dfrac{1}{2}$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递减，在 $(-2,\dfrac{1}{a})$ 单调递增.……12 分

20.（12 分）解析：（1）由 $na_n=(n-1)a_{n-1}+2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$

可得 $(n+1)a_{n+1}=na_{n-2}+2\left(n\in\mathrm{N}\right)$，　　　…………………2 分

两式相减可得 $(n+1)a_{n-1}-na_n=na_{n-2}-(n-1)a_{n+1}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

化简可得 $2na_{n+1}=n\left(a_{n-2}+a_n\right)\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，即 $2a_{n-1}=a_{n+2}+a_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

因此数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.　　　…………………4 分

（2）由 $na_n=(n-1)a_{n+1}+2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 可得 $a_1=2$，　　　…………………5 分

因为 $a_2=4$，且数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $a_n=2n$，　　　…………6 分

设 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和中，奇数项的和为 P_n，偶数项的和为 Q_n，

当 n 为奇数时，$b_n=\dfrac{4}{a_na_{n+2}}=\dfrac{4}{2n(2n+4)}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，……7 分

$$P_n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$$　　　………………8 分

当 n 为偶数时，$b_n = 2^{\frac{a_n}{2}} = 2^n$，　　……………………………………………9 分

$Q_n = b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2n} = 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2n} = \dfrac{4\left(1-4^n\right)}{1-4} = \dfrac{4^{n+1}}{3} - \dfrac{4}{3}$，……10 分

因此 $T_{2n} = \dfrac{4^{n+1}}{3} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4n+2} = \dfrac{4^{n+1}}{3} - \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{5}{6}$.　　……………12 分

21.（12 分）解：（1）设明星队赢球 X 场，其中 $X \in \{0,1,2,3,\ldots,11\}$；　……1 分

其中 $X \sim B(11,0.6)$　　……………………………………3 分

估计明星队赢球的场数为：$E(X) = 11 \times 0.6 = 6.6$　　…………………………4 分

（2）令 ξ 表示明星队"$2k-1$ 场比赛中赢球的场数"，P_{2k-1} 表示 $2k-1$ 场比赛中明星队战胜对方球队，P_{2k+1} 表示 $2k+1$ 场比赛中明星队战胜对方球队.

其中 $P_{2k-1} = P(\xi \ge k) = P(\xi = k) + P(\xi \ge k+1)$；　　……………………6 分

在 $2k+1$ 场比赛中明星队获胜由以下三个互斥事件组成：

（i）$\xi \ge k+1$；

（ii）$\xi = k$ 而且剩下的 2 场比赛中明星队至少赢得 1 场；

(iii) $\xi = k-1$ 而且剩下的 2 场比赛中明星队赢球.

$P_{2k+1} = P(\xi \ge k+1) + P(\xi = k)[1-(1-p)^2] + P(\xi = k-1)p^2$　　……………8 分

$$
\begin{aligned}
P_{2k+1} - P_{2k-1} &= P(\xi = k-1)p^2 - P(\xi = k)(1-p)^2 \\
&= p^2 C_{2k-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^k - (1-p)^2 C_{2k-1}^{k} p^k (1-p)^{k-1} \\
&= C_{2k-1}^{k} p^k (1-p)^k [p-(1-p)] \\
&= C_{2k-1}^{k} p^k (1-p)^k (2p-1)
\end{aligned}
$$
…………………10 分

若 $P_{2k+1} - P_{2k-1} > 0$，只需 $2p-1>0$，即 $p > \dfrac{1}{2}$.　　…………………12 分

22.（12 分）解证：（1）显然，$f(1)=0$.　　…………………………1 分

$f'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$ ……………………………2 分

①当 $a\le 2$ 时，$f'(x)=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}\le\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\le 0$，……3 分

函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，所以 $f(x)\ge f(1)=0$； ……………………4 分

②当 $a>2$ 时，设 $g(x)=-x^2+ax-1$，且 $g(0)=-1$，$g(1)=a-2>0$，

则 $\exists x_0\in(0,1)$ 使 $g(x_0)=0$． …………………………………………5 分

由 $g(x)$ 在 $(0,1]\subset(0,\frac{a}{2})$ 上单调递增，知 $x\in[x_0,1]$ 时 $g(x)\ge 0$ 即 $f'(x)\ge 0$，

函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上单调递增，$f(x_0)<f(1)=0$ 与 $f(x)\ge 0$ 恒成立矛盾．…6 分

综上可得，$a\in(-\infty,2]$． ………………………………………………7 分

（2）令 $a=2$，由（1）知 $2\ln x\ge x-\frac{1}{x}$，$\forall x\in(0,1]$． …………………8 分

取 $x=\frac{1}{n+1}$，于是 $2\ln(\frac{1}{n+1})=2\ln(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2})$

$=2[\ln(\frac{n}{n+1})+\ln(\frac{n-1}{n})+\ln(\frac{n-2}{n-1})+\cdots\cdots+\ln(\frac{2}{3})+\ln(\frac{1}{2})]$ …………10 分

$>(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n})+(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n-1})+(\frac{n-2}{n-1}-\frac{n-1}{n-2})+\cdots\cdots+(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})+(\frac{1}{2}-2)$

$=-[(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1})+(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2})+\cdots\cdots+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+1)]$

$=-(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}+\cdots\cdots+\frac{2}{3}+\frac{2}{2}+1)$

$=-2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)})$， ………………………11 分

所以，对 $\forall n\in N^*$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}>\ln(n+1)$． ……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。