姓　　名＿＿＿＿＿＿＿＿

准考证号＿＿＿＿＿＿＿＿

绝密★启用前

2021年普通高等学校全国统一招生考试 湘豫名校联考(4月)

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

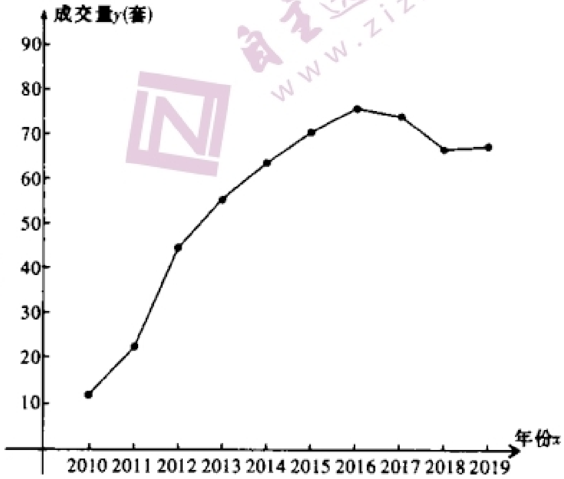
1. 已知复数 z 满足 $z+\bar{z}=8, z\cdot\bar{z}=25$，则 $z=$

A. $3\pm4i$　　B. $\pm3+4i$　　C. $4\pm3i$　　D. $\pm4+3i$

2. 已知集合 $A=\{(x,y)|3x-y=0\}, B=\{(x,y)|x+my+1=0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 $m=$

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

3. 自2010年以来，一、二、三线城市的房价均呈现不同程度的上升趋势，以房养老的观念渐入人心，使得各地房产中介公司的交易数额日益增加。现将A房产中介公司2010—2019年4月份的售房情况统计如图所示，根据2010—2013年、2014—2016年、2017—2019年的数据分别建立回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}_1x+\hat{a}_1$、$\hat{y}=\hat{b}_2x+\hat{a}_2$、$\hat{y}=\hat{b}_3x+\hat{a}_3$，则



A. $\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3, \hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$

B. $\hat{b}_2>\hat{b}_1>\hat{b}_3, \hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$

C. $\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3, \hat{a}_3>\hat{a}_1>\hat{a}_2$

D. $\hat{b}_2>\hat{b}_1>\hat{b}_3, \hat{a}_3>\hat{a}_1>\hat{a}_2$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_na_m=a_{n+m}$，且 $a_2=2$，那么 $a_{20}=$

A. 2^{40}　　B. 2^{30}　　C. 2^{20}　　D. 2^{10}

5. 已知抛物线 $E: y^2=4x$ 的焦点为 F，M 是抛物线 E 上一点，N 是圆 $C:(x-6)^2+(y-2)^2=4$ 上一点，则 $|MN|+|MF|$ 的最小值为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

6. 已知 $a=\log_2 5+\log_5 2$，$b=\log_2 5\cdot\log_5 2$，$c=\dfrac{\log_2 5}{\log_5 2}$，则

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<b<a$

7. 为帮助当地老百姓尽快脱贫，某市政府决定选派 8 名干部（5 男 3 女）到该市甲、乙两个县去督查扶贫工作，若要求每个县至少要派 3 名干部，每个干部必须去两个县中的一个督查，且不能仅仅将 3 名女干部编为一组去某个县督查，则不同的派遣方案共有

A. 90 种　　B. 180 种　　C. 125 种　　D. 250 种

8.《九章算术》是中国古代张苍、耿寿昌所撰写的一部数学专著，是《算经十书》中最重要的一部，其中将有三条棱互相平行且有一个面为梯形的五面体称之为"羡除"，下列说法：

①"羡除"有且仅有两个面为三角形；②"羡除"一定不是台体；③不存在有两个面为平行四边形的"羡除"；④"羡除"至多有两个面为梯形.

其中正确的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 若曲线 $y=x^2$ 与 $y=\ln(x-a)$ 有一条斜率为 2 的公切线，则 $a=$

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 2$　　B. $\dfrac{1}{2}\ln 2$　　C. $-\ln 2$　　D. $\ln 2$

10. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的右焦点为 F，过原点 O 的直线与双曲线 C 交于 A，B 两点，且 $\angle AFB=60°$，则 $\triangle OBF$ 的面积为

A. $\dfrac{9}{2}$　　B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

11. 为培育学生核心素养，某校开设了素描、摄影、剪纸、书法四门选修课，要求每位同学都要选择其中的两门课程. 已知甲同学选了素描，乙与甲没有相同的课程，丙与甲恰有一门课程相同，丁与丙没有相同课程. 则以下说法错误的是

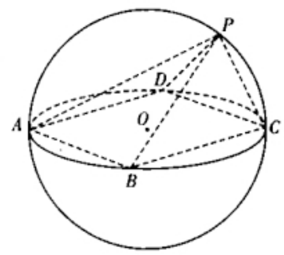
A. 丙有可能没有选素描

B. 丁有可能没有选素描

C. 乙、丁可能两门课都相同

D. 这四个人里恰有 2 个人选素描

12. 如图，A,B,C,D,P 是球 O 上 5 个点，$ABCD$ 为正方形，球心 O 在平面 $ABCD$ 内，$PB=PD$，$PA=2PC$，则异面直线 PA 与 CD 所成角的余弦值为



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

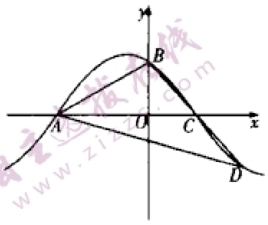
C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 均为单位向量，若 $|\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为__________.

14. 请写出满足条件"$f(x)\leqslant f(1)$对任意的 $x\in[0,1]$恒成立，且 $f(x)$在$[0,1]$上不是增函数"的一个函数：____________________.

15. 如图，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的图象与坐标轴交于点 A,B,C，直线 BC 交 $f(x)$ 的图象于点 D，O(坐标原点)为$\triangle ABD$ 的重心(三条边中线的交点)，其中 $A(-\pi,0)$，则$\triangle ABD$ 的面积为__________.



16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-4, x\leqslant -3,\\ -x^2+2, x>-3.\end{cases}$ 数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=f(a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$，若$\{a_n\}$是等差数列，则 a_1 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(12 分)

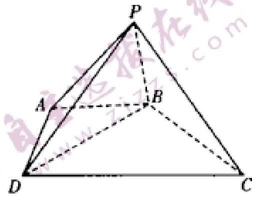
在$\triangle ABC$ 中，已知内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求 B；

(2)若 $c=5,b=7$，求$\triangle ABC$ 的周长.

18.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知 $AB/\!/DC$，$AB=AD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$CD=2$，$PB=PC=PD=\sqrt{6}$.



(1)证明：平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l，求直线 l 与平面 $ABCD$ 所成角的大小.

19.（12 分）

已知点 $P(1,0)$ 在椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，动直线 $y=y_0$ 与椭圆 C 交于不同的两点 A，B，当 $y_0=1$ 时，$|AB|=\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)直线 PA，PB 分别交 y 轴于 M，N 两点，问：y 轴上是否存在点 Q，使得 $|OM|$，$|OQ|$，$|ON|$（O 为坐标原点）成等比数列？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-x-a$，对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)证明：当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，$\cos x+\tan x\leqslant e^x$.

21.(12分)

某种高危传染疾病在全球范围内蔓延,被感染者的潜伏期约为14天,期间有很大的概率传染给他人,一旦发病,对感染者身体机能的损害很大.某市为了防止该传染疾病继续扩散,疾病预防控制中心决定对全市人口进行血液检测以筛选出被感染者.由于检测试剂十分昂贵且数量有限,需采用混样检测的方式进行筛查,即将多份样本混合为一个样本池进行检测.已知感染者的检测结果为阳性,未被感染者则为阴性,另外检测结果为阳性的血样与检测结果为阴性的血样混合后检测结果为阳性,同一检测结果的血样混合后结果不发生改变.在实际检测中,若检测结果为阴性,则说明样本池中没有感染者,不需再检测;若为阳性,则对样本池中每一份样本进行逐一筛查.

(1)假设每个样本检测为阳性的概率为 p,且每个样本的检测结果相互独立.若将10个样本混为一个样本池,每个样本平均需要消耗多少次检测?

(2)据《柳叶刀》发表的研究结果显示,通过混样检测方法进行检测时,在保证灵敏度和准确性的前提下,一个样本池允许最多混合30个样本,且混合样本数越少,准确性越高.已知某市总人口约有1100万人,该市的单日检测能力为10万样本/天,预计该市每个样本检测为阳性的概率 $p=0.1\%$.若该市提出"十天大会战"(即在十天内对全市所有人口进行疾病筛查),请问,在确保10天能全部检测完该市所有人口血液样本的前提下,一个样本池至少要混合多少个样本?

(参考公式:$(1+\varepsilon)^n\approx 1+n\varepsilon$ $(n\in\mathbf{N}^*,|\varepsilon|$远小于1))

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知 P 是曲线 $C_1:x^2+(y-2)^2=4$ 上的动点,将 OP 绕点 O 顺时针旋转90°得到 OQ,设点 Q 的轨迹为曲线 C_2.以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C_1,C_2 的极坐标方程;

(2)在极坐标系中,点 $M\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$,射线 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\geqslant 0)$ 与曲线 C_1,C_2 分别相交于异于极点 O 的 A,B 两点,求 $\triangle MAB$ 的面积.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x-\lambda|$,其中 $\lambda>0$.

(1)若对任意 $x\in\mathbf{R}$,恒有 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$,求 λ 的最小值;

(2)在(1)的条件下,设 λ 的最小值为 t,若正数 m、n 满足 $m+2n=tmn$,求 $2m+n$ 的最小值.

2021年普通高等学校全国统一招生考试
湘豫名校联考(4月)

理科数学参考答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	B	A	D	B	A	B	C	A	D	C	D

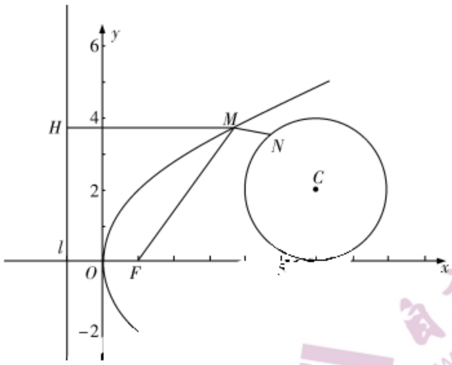
1. C 【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,依题意得,$2a=8,a^2+b^2=25$,解得$a=4,b=\pm3$,所以$z=4\pm3i$.故选C.

2. B 【解析】因为$A\cap B=\varnothing$,所以直线$3x-y=0$与直线$x+my+1=0$平行,所以$m=-\frac{1}{3}$.故选B.

3. A 【解析】观察图可知,$\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3,\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$,故选A.

4. D 【解析】由$a_na_m=a_{n+m},a_2=2$,得$a_{20}=a_2\cdot a_{18}=a_2\cdot a_2\cdot a_{16}=\cdots=a_2^{10}=2^{10}$,故选D.

5. B 【解析】如图,圆$C:(x-6)^2+(y-2)^2=4$的圆心为$C(6,2)$,半径为$r=2$,直线l是抛物线的准线,过M作$MH\perp l$于H,则$|MF|=|MH|$,



$\therefore|MF|+|MN|=|MH|+|MN|\geqslant|MH|+|MC|-|CN|\geqslant|CH|-2$,

当且仅当C,M,H三点共线时,等号成立.此时$|MF|+|MN|$取得最小值为$6-(-1)-2=5$,故选B.

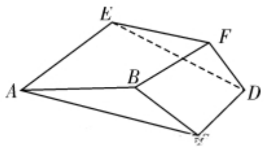
6. A 【解析】因为$\log_2 5>\log_2 4=2$,所以$c=\frac{\log_2 5}{\log_5 2}=(\log_2 5)^2>4$,

而$b=\log_2 5\cdot\log_5 2=\log_2 5\cdot\frac{1}{\log_2 5}=1$.又$\log_2 5<\log_2 8=3,\log_5 2<\log_5 5=1$,

$\therefore a=\log_2 5+\log_5 2<4,\therefore b<a<c$,故选A.

7. B 【解析】因为每个县至少要派3人,则两个县中派遣的人数分别为3、5或4、4,又因为3名女干部不能单独成一组,则不同的派遣方案种数为$\left(C_8^3+\frac{C_8^4}{A_2^2}-1\right)A_2^2=180$,故选B.

8. C 【解析】如图所示,$AE/\!/BF/\!/CD$,四边形$ACDE$为梯形.



对于①,由题知:"羡除"有且仅有两个面为三角形,故①正确;

对于②,因为$AE/\!/BF/\!/CD$,所以"羡除"一定不是台体,故②正确;

对于③，假设四边形 $ABFE$ 和四边形 $BCDF$ 为平行四边形，

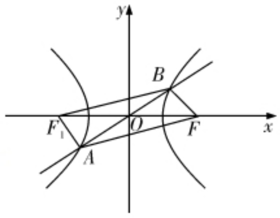
则 $AE\parallel BF\parallel CD$，$AE=BF=CD$，则四边形 $ACDE$ 为平行四边形，

与已知四边形 $ACDE$ 为梯形矛盾，故不存在，③正确；

对于④，若 AE，BF，CD 两两不相等，则"羡除"有三个面为梯形，故④错误，故选 C.

9. A 【解析】由 $y'=2x=2\Rightarrow x=1$，由点斜式得切线方程：$y-1=2(x-1)$，对曲线 $y=\ln(x-a)$，$y'=\frac{1}{x-a}=2$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}+a$，代入 $y=\ln(x-a)$ 得：$y=-\ln 2$，将 $\left(\frac{1}{2}+a,-\ln 2\right)$ 代入 $y=2x-1$，得：$-\ln 2=2\left(\frac{1}{2}+a\right)-1$ $\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\ln 2$，故选 A.

10. D 【解析】如图，设双曲线的左焦点为 F_1，连接 AF_1，BF_1，依题可知，



四边形 $AFBF_1$ 为平行四边形.

由 $\angle AFB=60°$ 可得 $\angle F_1BF=120°$，$|F_1F|=2c=2\sqrt{16+9}=10$.

在 $\triangle BF_1F$ 中，由余弦定理可得：$|BF_1|^2+|BF|^2-2|BF_1||BF|\cos\angle F_1BF=|F_1F|^2$，

即 $|BF_1|^2+|BF|^2+|BF_1||BF|=100$，①

又因为点 B 在双曲线上，则 $||BF_1|-|BF||=2a=8$，

所以 $|BF_1|^2+|BF|^2-2|BF_1||BF|=64$，②

①－②得 $3|BF_1||BF|=36$，即 $|BF_1||BF|=12$，

所以 $S_{\triangle F_1BF}=\frac{1}{2}|BF_1||BF|\sin\angle F_1BF=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

因为 O 为 F_1F 的中点，所以 $S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}S_{\triangle F_1BF}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

11. C 【解析】因为甲选择了素描，所以乙必定没选素描. 那么假设丙选择了素描，则丁一定没选素描；若丙没选素描，则丁必定选择了素描. 综上，必定有且只有 2 人选择素描，选项 A，B，D 判断正确.

不妨设甲另一门选修为摄影，则乙素描与摄影均不选修，则对于素描与摄影可能出现如下两种情况：

情形一	甲	乙	丙	丁	情形二	甲	乙	丙	丁
素描	√	×	√	×	素描	√	×	×	√
摄影	√	×	×	√	摄影	√	×	√	×

由上表可知，乙与丁必有一门课程不相同，因此 C 不正确.

12. D 【解析】因为 $ABCD$ 为正方形，故 $AB\parallel CD$，$\angle PAB$ 即为所求异面直线 PA 与 CD 所成角.

由 $PA^2+PC^2=4R^2$ 与 $PA=2PC$，可得 $PA=\frac{4R}{\sqrt{5}}$，$AB=\sqrt{2}R$，$PB=PD\Rightarrow PO\perp BD\Rightarrow PB=\sqrt{2}R$，

$$\therefore\cos\angle PAB=\frac{2R^2+\frac{16}{5}R^2-2R^2}{2\cdot\frac{4R}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}R}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$ 故选 D.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】依题意，$|e_1|=|e_2|=1$，$|e_1-e_2|^2=3$，所以 $2-2e_1\cdot e_2=3$，即 $e_1\cdot e_2=-\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle e_1,e_2\rangle$ $=\frac{e_1\cdot e_2}{|e_1||e_2|}=-\frac{1}{2}$，所以 $\langle e_1,e_2\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

（注：此题亦可用数形结合，画图易知）

14. $f(x)=\sin\frac{5\pi}{2}x$（答案不唯一） 【解析】答案不唯一，如：$f(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$，$f(x)=\sin\frac{5\pi}{2}x$ 等.

15. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$ 【解析】因为 O 为 $\triangle ABD$ 的重心，$A(-\pi,0)$，

所以 $OA=\frac{2}{3}AC=\pi$，所以 $AC=\frac{3}{2}\pi$，所以 $C\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

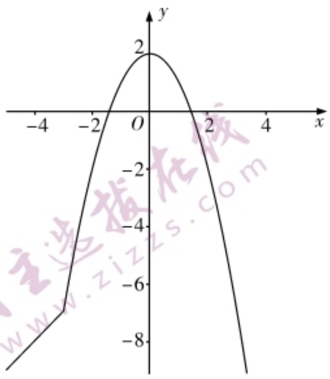
所以 $\frac{\pi}{\omega}=\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{2}$，$\omega=\frac{2}{3}$.

因为 $\frac{2}{3}\times(-\pi)+\varphi=k\pi$，所以 $\varphi=k\pi+\frac{2\pi}{3}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)$，于是 $|OB|=f(0)=2\sin\left(\frac{2}{3}\times0+\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，

故 $\triangle ABD$ 的面积为 $S=2\times\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$.

16. $(-\infty,-3]\cup\{-2,1\}$ 【解析】画出函数 $f(x)$ 的图象如右图所示，



当 $a_1\leqslant-3$ 时，$a_2=f(a_1)=a_1-4\leqslant-7$，$a_3=f(a_2)=a_2-4\leqslant-11$，…，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公差为 -4 的等差数列，符合题意；

当 $a_1>-3$ 时，因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，若其公差 $d>0$，则 $\exists k_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_0}>2$，这与 $a_{n+1}=f(a_n)=2-a_n^2\leqslant2$ 矛盾；若其公差 $d=0$，则 $a_2-a_1=-a_1^2+2-a_1=0$，解得 $a_1=-2$ 或 $a_1=1$，则当 $a_1=-2$ 时，$a_n=-2$ 为常数列. 当 $a_1=1$ 时，$a_n=1$ 为常数列，此时 $\{a_n\}$ 为等差数列，符合题意；若其公差 $d<0$，则 $\exists k_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_0}>-3$ 且 $a_{k_0+1}\leqslant-3$，则等差数列的公差必为 -4，因此 $a_{k_0+1}-a_{k_0}=-4$，$\therefore 2-a_{k_0}^2-a_{k_0}=-4$，解得 $a_{k_0}=-3$（舍去）或 $a_{k_0}=2$，又当 $a_{k_0}=2$ 时，$a_{k_0+1}=a_{k_0+2}=a_{k_0+3}=\cdots=-2$ 这与 $\{a_n\}$ 是等差数列矛盾.

综上所述，a_1 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup\{-2,1\}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17.【解析】(1) 由 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$ 及正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $\sin B\sin A=\sin A\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$. ………………………………………… 2 分

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\sin B=\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，………………………………………… 4 分

即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$，亦即 $\tan B=\sqrt{3}$. ………………………………………… 6 分

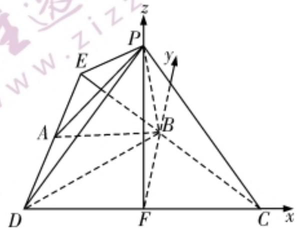
由于 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………… 8 分

(2)在$\triangle ABC$中，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $a^2-5a-24=0$，………………… 10 分

解得 $a=8$ 或 $a=-3$(舍)，所以 $a=8$. ………………………………………… 11 分

故$\triangle ABC$的周长为 20. ………………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)证明：因为 $AB=AD=1,BD=\sqrt{2}$，



所以 $AB^2+AD^2=BD^2$，即 $AB\perp AD$. ………………………… 1 分

又因为 $AB/\!/DC$，所以 $AD\perp CD$. ………………………… 2 分

取 CD 中点为 F 点，连 FB,FP.

因 $PC=PD=\sqrt{6},CD=2$，所以 $FP=\sqrt{5}$. ………………………… 3 分

又因 $AB/\!/FD,AB=FD=1,AB\perp AD$.

所以四边形 $ABFD$ 是正方形，所以 $FB\perp CD$.

且 $AD=FB=1$，所以 $FP^2+FB^2=PB^2$. $\therefore FP\perp FB$. ………………………… 4 分

又因为 $FP\cap CD=F$，所以 $FB\perp$平面 PCD. ………………………… 5 分

又因为 $FB\subset$平面 $ABCD$，所以平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$. ………………………… 6 分

(2)延长 DA 和 CB，使其相交于点 E，则平面 PAD 与平面 PBC 的交线 l 即为 PE. ……… 7 分

由(1)知 $FP\perp FB,PF\perp FC,FC\perp FB$，故以点 F 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，…… 8 分

则 $P(0,0,\sqrt{5}),E(-1,2,0),\overrightarrow{PE}=(-1,2,-\sqrt{5})$. ………………………… 9 分

又平面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，………………………… 10 分

设直线 l 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|-\sqrt{5}|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，………………………… 11 分

故所求直线 l 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$. ………………………… 12 分

(注：此题亦可用几何法，上图中$\angle PEF$即为所求)

19.【解析】(1)由题意得 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{1}{a^2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1.\end{cases}$ 解得 $a^2=2$. ………………………… 3 分

故所求椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$. ………………………… 4 分

(2)假设存在点 $Q(0,m)$ 使得 $|OM|,|OQ|,|ON|$ 成等比数列，则 $|OQ|^2=|ON|\,|OM|$. ……… 5 分

因为直线 $y=y_0$ 交椭圆 C 于 A,B 两点，则 A,B 两点关于 y 轴对称. ………………… 6 分

设 $A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,y_0)(x_0\neq\pm1)$，

因为 $P(1,0)$，则直线 PA 的方程为：$y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，令 $x=0$，得 $y_M=\frac{-y_0}{x_0-1}$. ………… 7 分

直线 PB 的方程为：$y=\frac{-y_0}{x_0+1}(x-1)$，令 $x=0$，得 $y_N=\frac{y_0}{x_0+1}$. ………………… 8 分

因为 $|OQ|^2=|ON|\,|OM|$，所以 $m^2=\frac{y_0^2}{|x_0^2-1|}$. ………………………… 9 分

又因为点 $A(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，所以 $y_0^2=2(1-x_0^2)$. ………… 10 分

所以 $m^2=\dfrac{2(1-x_0^2)}{1-x_0^2}=2$. 即 $m=\pm\sqrt{2}$. ………… 11 分

故存在点 $Q(0,\pm\sqrt{2})$，使得 $|OM|,|OQ|,|ON|$ 成等比数列. ………… 12 分

20.【解析】(1) 由 $e^x-x-a\geqslant 0$ 恒成立，得 $a\leqslant e^x-x$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

令 $g(x)=e^x-x$，$g'(x)=e^x-1$. ………… 2 分

当 $x>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$g(x)_{\min}=g(0)=1$. ………… 4 分

故所求实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ………… 5 分

(2) 证明：由(1)得 $e^x\geqslant x+1$.

欲证 $\cos x+\tan x\leqslant e^x$，只需证 $\cos x+\tan x\leqslant x+1$ 即可. ………… 7 分

令 $h(x)=\cos x+\tan x-x-1$，

$h'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\dfrac{\sin x(\sin x-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x(\sin x+\sin^2 x-1)}{\cos^2 x}$. ………… 8 分

令 $F(x)=\sin x+\sin^2 x-1$，则易知 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 单调递增，且 $F(0)<0$，$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，

故存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，使得 $F(x_0)=0$. ………… 10 分

当 $x\in[0,x_0)$ 时，$F(x)<0$，$h'(x)\leqslant 0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$F(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

又 $h(0)=0$，$h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\pi}{4}<0$，$h(x)_{\max}=h(0)=0$. ………… 11 分

故当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$\cos x+\tan x\leqslant e^x$. ………… 12 分

21.【解析】(1) 设含有 10 个样本的样本池所需的检验次数为 X，则 X 可以取得值为 1，11，

且 $P(X=1)=(1-p)^{10}$，$P(X=11)=1-(1-p)^{10}$. ………… 1 分

于是其分布列为：

X	1	11
P	$(1-p)^{10}$	$1-(1-p)^{10}$

………… 2 分

于是，这个样本池所需要的检验次数的期望为：

$E(X)=1\cdot(1-p)^{10}+11[1-(1-p)^{10}]=11-10(1-p)^{10}$， ………… 3 分

故平均每个样本需要的检测次数为 $\dfrac{11-10(1-p)^{10}}{10}=1+\dfrac{1}{10}-(1-p)^{10}$. ………… 4 分

(2) 设含有 k 个样本的样本池所需的检验次数为 Y，则其分布列为：

Y	1	$k+1$
P	0.999^k	$1-0.999^k$

………… 5 分

于是，这个样本池所需要的检验次数的期望为：

$E(Y)=1\times 0.999^k+(k+1)\times[1-0.999^k]=k+1-k\times 0.999^k$， ………… 6 分

故平均每个样本需要的检测次数为$\frac{k+1-k\times 0.999^k}{k}=1+\frac{1}{k}-0.999^k$. ………… 7分

根据题意,只要$\left(1+\frac{1}{k}-0.999^k\right)\times 1100<10\times 10$,即:$1+\frac{1}{k}-0.999^k<\frac{1}{11}$, ………… 8分

注意到:$0.999^k=(1-0.001)^k\approx 1-0.001k=1-\frac{k}{1000}$, ………… 9分

于是只要$1+\frac{1}{k}-\left(1-\frac{k}{1000}\right)<\frac{1}{11}$,即:$\frac{1}{k}+\frac{k}{1000}<\frac{1}{11}$. ………… 10分

由于$y=\frac{1}{k}+\frac{k}{1000}$在$(0,10\sqrt{10})$递减,经检验:

当$k=12$时,$\frac{1}{12}+\frac{12}{1000}\approx 0.08333+0.012=0.09533>\frac{1}{11}\approx 0.09090$,

当$k=13$时,$\frac{1}{13}+\frac{13}{1000}\approx 0.07692+0.013=0.08992<\frac{1}{11}\approx 0.09090$, ………… 11分

又$13<30$,故每个样本池至少需要13个样本,才能完成检测. ………… 12分

22.【解析】(1)由题知点Q的轨迹是以$(2,0)$为圆心,2为半径的圆,

所以曲线C_2的方程为$(x-2)^2+y^2=4$. ………… 2分

$\because \rho^2=x^2+y^2, x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

所以曲线C_1的极坐标方程为$\rho=4\sin\theta$, ………… 4分

曲线C_2的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$. ………… 5分

(2)在极坐标系中,设点A,B的极径分别为ρ_1,ρ_2,

所以$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=4\left|\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\right|=2(\sqrt{3}-1)$, ………… 7分

点$M\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$到射线$\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\geqslant 0)$的距离为$h=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$, ………… 8分

故$\triangle MAB$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|h=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$. ………… 10分

23.【解析】(1)因为$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x-\lambda|\geqslant\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)-(x-\lambda)\right|=\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|$. ………… 2分

所以$f(x)_{\min}=\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|$. ………… 3分

对任意$x\in\mathbf{R}$,恒有$f(x)\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$,解得$\lambda\geqslant 1$或$\lambda\leqslant 0$. ………… 4分

又已知$\lambda>0$,所以λ的最小值为1. ………… 5分

(2)由(1)知$t=1$,$m+2n=mn$,$\therefore \frac{1}{n}+\frac{2}{m}=1$. ………… 7分

$\therefore 2m+n=(2m+n)\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{m}\right)=5+\frac{2m}{n}+\frac{2n}{m}\geqslant 9$. ………… 9分

当且仅当$m=n=3$时取等号.

故所求$2m+n$的最小值为9. …………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》