

2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

理科数学

本试卷总分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

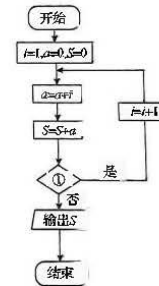
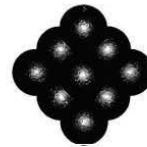
1. 已知集合  $A = \{x | y = \sqrt{-|x|+2}\}$ ,  $B = \{y | y = x^2 - 2x + 2\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $[-2, 2]$     B.  $[0, +\infty)$     C.  $[1, 2]$     D.  $[0, 2]$
2. 已知  $(1+2i)z = 9+3i$ , 则  $z$  在复平面对应的点位于  
A. 第一象限    B. 第二象限    C. 第三象限    D. 第四象限
3. 设  $p: a > 1 > b, q: ab + 1 < a + b$ , 则  $p$  是  $q$  的  
A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
4. 已知  $\tan(\alpha + 15^\circ) = 7 \tan(\alpha - 15^\circ)$ , 则  $\sin(\alpha - 15^\circ) \cos(\alpha + 15^\circ) =$   
A.  $\frac{2}{3}$     B.  $\frac{7}{12}$     C.  $\frac{1}{3}$     D.  $\frac{1}{12}$
5. 如图为国家统计局于 2023 年 1 月 20 日发布的 2016—2022 年全国 R&D 经费总量与 R&D 经费与 GDP 之比的数据图表, 则



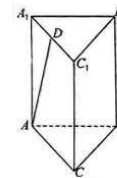
- A. R&D 经费总量的平均数超过 23 000 亿元
- B. R&D 经费总量的中位数为 19 678 亿元
- C. R&D 经费与 GDP 之比的极差为 0.45%
- D. R&D 经费与 GDP 之比增幅最大的是 2021 年到 2022 年

理科数学试题(二) 第 1 页(共 4 页)

6. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = -1, n(a_{n+1} - a_n) = \frac{2}{n+1}$  记  $\langle a_n \rangle$  为不小于  $a_n$  的最小整数,  $b_n = \langle a_n \rangle$ , 则数列  $\{b_n\}$  的前 2 023 项和为  
A. 2 020    B. 2 021    C. 2 022    D. 2 023
7. 南宋时期的数学家杨辉所著的《详解九章算法》中有一个如图所示的“三角垛”问题, 在“三角垛”的最上层放有一个球, 第二层放有 3 个球, 第三层放有 6 个球, …… 依此规律, 其相应的程序框图如图所示. 若输出的  $S$  的值为 56, 则程序框图中①处可以填入



- A.  $i < 4$     B.  $i < 5$     C.  $i < 6$     D.  $i < 7$
8. 如图, 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 = 2AB$ ,  $D$  为棱  $A_1C_1$  的中点, 则直线  $AD$  与平面  $B_1BCC_1$  所成角的正弦值为  
A.  $\frac{\sqrt{51}}{34}$   
B.  $\frac{\sqrt{51}}{17}$   
C.  $\frac{\sqrt{17}}{5}$   
D.  $\frac{\sqrt{17}}{6}$
  9. 已知  $a = \log_4 8, b = \frac{e^2}{4}, c = \frac{e^{2023}}{2 \cdot 023^2}$ , 则  
A.  $c < b < a$     B.  $a < b < c$     C.  $a < c < b$     D.  $b < a < c$
  10. 在数学中, 欧拉-马歇罗尼常数  $\gamma$  是数学中的一个重要常用无理数, 为了便于使用, 我们认为  $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ , 且  $\gamma \approx 0.577 2$ . 研究  $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  与  $g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$  的单调性, 可得  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1600}$  所在的区间为(参考数据:  $\ln 2 \approx 0.693 1, \ln 1600 \approx 7.377 8$ )  
A.  $(6.5, 7)$     B.  $(7, 7.5)$     C.  $(7.5, 8)$     D.  $(8, 8.5)$



理科数学试题(二) 第 2 页(共 4 页)

全国卷

11. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 以  $F_1F_2$  为直径的圆与双曲线在第二象限的部分交于点  $P$ , 若双曲线上的点  $Q$  满足  $\overrightarrow{F_1P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$ , 则双曲线的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{37}}{5}$       B.  $\frac{\sqrt{35}}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{37}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

12. 已知函数  $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + (n-m-1)x - n + 1$  在区间  $(-1, 1]$  上有三个不同的零点, 则  $m^2 - n^2$  的取值范围是

- A.  $(-2, -1)$       B.  $(-1, 0)$       C.  $(0, 1)$       D.  $(1, 2)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知单位向量  $a, b$  满足  $(a-2b) \cdot (3a+5b) = -\frac{22}{3}$ , 则向量  $a$  与向量  $b$  夹角的余弦值为 \_\_\_\_\_.

14. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  与圆  $C: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ , 直线  $l: 2x - y + 4 = 0$  交圆  $O$  于  $A, B$  两点, 交圆  $C$  于  $D, E$  两点,  $M, N$  分别为  $AB, DE$  的中点, 则  $|MN| =$  \_\_\_\_\_.

15. 在菱形  $ABCD$  中,  $A = \frac{\pi}{3}, AB = 2$ , 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  折起, 使得点  $A$  到平面  $BCD$  的距离最大, 此时四面体  $ABCD$  的所有顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为 \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^x, g(x) = x \ln(2x) + 4x$ . 若实数  $x_1, x_2$  满足  $f(x_1) = g(x_2) = a (a > 2)$ , 则  $x_1x_2 + 4x_2 - 4 \ln a$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

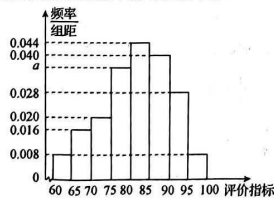
记等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_3 = 5, a_2 > 0$ , 且  $S_5 = (a_2 + 1)S_3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\left\{ \frac{n+S_n}{3^n} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (12 分)

某乒乓球队训练教官为了检验学员某项技能的水平, 随机抽取 100 名学员进行测试, 并根据该项技能的评价指标, 按  $[60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95), [95, 100]$  分成 8 组, 得到如图所示的频率分布直方图。



(1) 求  $a$  的值, 并估计该项技能的评价指标的中位数 (精确到 0.1);

全国卷

理科数学试题(二) 第 3 页(共 4 页)

(2) 若采用分层抽样的方法从评价指标在  $[70, 75)$  和  $[85, 90)$  内的学员中随机抽取 12 名, 再从这 12 名学员中随机抽取 5 名学员, 记抽取到学员的该项技能的评价指标在  $[70, 75)$  内的学员人数为  $X$ , 求  $X$  的分布列与数学期望。

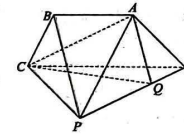
19. (12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD, CP \perp CD, CD = 2AB = 2, AP = AC = AD$ .

(1) 证明: 平面  $PBC \perp$  平面  $PCD$ ;

(2) 已知  $CP = \sqrt{2}, BC = 2, \overrightarrow{DQ} = \lambda \overrightarrow{DP}, \lambda \in [0, 1]$ . 若平面  $ABP$

与平面  $ACQ$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ , 求  $\lambda$  的值。



20. (12 分)

已知椭圆  $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右顶点分别为  $A, B$ , 长轴长为短轴长的 2 倍, 点  $P$  在  $C$  上运动, 且  $\triangle ABP$  面积的最大值为 8.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 若直线  $l$  经过点  $Q(1, 0)$ , 交  $C$  于  $M, N$  两点, 直线  $AM, BN$  分别交直线  $x = 4$  于  $D, E$  两点, 试问  $\triangle ABD$  与  $\triangle AQE$  的面积之比是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 说明理由。

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = e^{-x} + a \cos x - 2$ .

(1) 若  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上单调递减, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 当  $x \in (-\infty, 0]$  时,  $f(x) + (2-a)(x+1) \geq 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围。

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ . 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 + 4\rho \sin \theta + 12 - a = 0 (a > 8)$ .

(1) 求  $l$  的普通方程和  $C$  的直角坐标方程;

(2) 当  $l$  与  $C$  有公共点时, 求实数  $a$  的取值范围。

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = 2|x+2| - |x-5|$ .

(1) 求不等式  $f(x) \geq 4$  的解集;

(2) 若  $f(x) \geq a^2 + 2a - 10$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围。

理科数学试题(二) 第 4 页(共 4 页)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：  
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



 微信搜一搜

 自主选拔在线