# 广东省普通高中2022届高三9月阶段性质量检测

# 数　学

2021.9

**考生注意：**

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：集合、常用逻辑、函数与导数。

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 设命题 $p$：$\forall x>2, x^2<e^x$，则命题 $p$ 的否定为

A. $\exists x>2, x^2<e^x$　　B. $\exists x>2, x^2\geqslant e^x$

C. $\forall x>2, x^2\geqslant e^x$　　D. $\forall x>2, x^2>e^x$

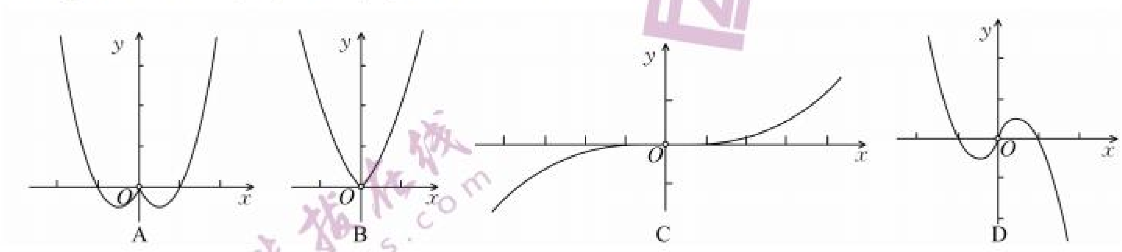
2. 已知集合 $A=\left\{x \mid 2^x>\frac{1}{1}, x\in \mathbf{Z}\right\}$，$B=\{a, 2a\}$，若 $B\subseteq A$，则 $a$ 的值可能是

A. $-1$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, x\geqslant 3,\\ 2^x, x<3,\end{cases}$ 则 $f(f(81))=$

A. 16　　B. $-\log_3 4$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\log_3 4$

4. 函数 $f(x)=(x^2+|x|)\cdot\ln|x|$ 的图象大致是



5. 已知函数 $f(x)=ax^2+x+c$，有下列四个命题：

$p_1$：$x=-1$ 是 $f(x)$ 的零点；　　$p_2$：$x=2$ 是 $f(x)$ 的零点；

$p_3$：$f(x)$ 的两个零点之和为3；　　$p_4$：$f(x)$ 有两个同号零点.

如果只有一个假命题，则该命题是

A. $p_1$　　B. $p_2$　　C. $p_3$　　D. $p_4$

6. 若函数 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 在$[1,4]$上存在单调递减区间，则实数 $a$ 的取值范围为

A. $\left[-\frac{7}{16},+\infty\right)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $\left(-\frac{7}{16},+\infty\right)$

7. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$在$[0,10]$上有 1 和 3 两个零点，且 $y=f(x+2)$与 $y=f(x+7)$都是偶函数，则函数 $y=f(x)$在$[0,2\ 013]$上的零点个数为

A. 404　　B. 804

C. 806　　D. 402

8. 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，且 $\ln a=a-1$，$b\ln b=1$，$ce^c=1$，则 $a,b,c$ 的大小关系是

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。**

9. 已知 $p$：关于 $x$ 的不等式 $mx^2-3mx+4>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则下列结论正确的是

A. $p$ 的必要不充分条件是$-1\leqslant m<2$　　B. $p$ 的充分不必要条件是 $m=\frac{2\ 021}{2\ 020}$

C. $0<m<\frac{16}{9}$是 $p$ 的充要条件　　D. $|m|\leqslant 2$ 是 $p$ 的既不充分也不必要条件

10. 已知函数 $y=2a+\left|\frac{(1-2a)x+3+2a}{x-1}\right|$（$a$ 是常数）在$[2,5]$上的最大值是 5，则 $a$ 的值可能是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 已知函数 $f(x)=x+\sin x-x\cos x$ 的定义域为$[-2\pi,2\pi)$，则

A. $f(x)$为奇函数

B. $f(x)$在$[0,\pi)$上单调递增

C. $f(x)$恰有 4 个极大值点

D. $f(x)$有且仅有 4 个极值点

12. 已知函数 $f(x)=x^2+mx+n(m,n\in\mathbf{R})$，关于 $x$ 的不等式 $x<f(x)$的解集为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，则

A. $m=-1,n=1$

B. 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g(x)$的最小值一定为 $g(1)=1$

C. 不等式 $f(x)<f(f(x))$的解集为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

D. 若 $h(x)=\begin{cases}\frac{3}{4},x\leqslant\frac{1}{2}\\ f(x),x>\frac{1}{2}\end{cases}$，且 $h(x)<h(2x+2)$，则 $x$ 的取值范围是$\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$

**三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13. 已知曲线 $f(x)=x^3+b$ 在 $x=a(a>0)$处的切线方程为 $3x-y+2=0$，则 $b=$________.

14. 若函数 $f(x)$满足 $f(x)-x=2f(2-x)$，则 $f(3)=$________.

15. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处取得极值 10，则 $f(2)$的值为________.

16. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上无零点的偶函数，若 $f(\pi^0)=0$，且 $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒成立，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 的解集是________.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17.（本小题满分 10 分）

设 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的数列，$a_1=3$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+4a_{n+1}+4a_n}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，且 $b_n=\dfrac{n(n+1)}{S_{n+1}S_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和.

18.（本小题满分 12 分）

某班体育课组织篮球投篮考核，考核分为定点投篮与三步篮两个项目. 每个学生在每个项目投篮 5 次，以规范动作投中 3 次为考核合格，定点投篮考核合格得 4 分，否则得 0 分；三步篮考核合格得 6 分，否则得 0 分. 现将该班学生分为两组，一组先进行定点投篮考核，一组先进行三步篮考核，若先考核的项目不合格，则无需进行下一个项目，直接判定为考核不合格；若先考核的项目合格，则进入下一个项目进行考核，无论第二个项目考核是否合格都结束考核. 已知小明定点投篮考核合格的概率为 0.8，三步篮考核合格的概率为 0.7，且每个项目考核合格的概率与考核次序无关.

(1)若小明先进行定点投篮考核，记 $X$ 为小明的累计得分，求 $X$ 的分布列；

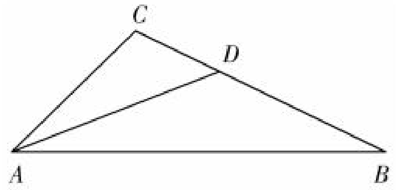
(2)为使累计得分的期望最大，小明应选择先进行哪个项目的考核？并说明理由.

19.（本小题满分 12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，且 $3(b-a\cos C)=2c$.

(1)求 $\cos A$；

(2)若 $c=2b$，点 $D$ 在边 $BC$ 上，且 $BD=2DC$，$AD=\sqrt{10}$，求 $c$.

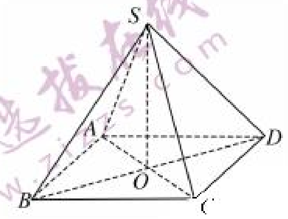


20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面四边形 $ABCD$ 是正方形,且顶点 $S$ 到 $A,B,C,D$ 的距离相等,$AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$,连接 $SO$.

(1)求证:$SO\perp CD$;

(2)若 $SA=AB$,求平面 $SAB$ 与平面 $SCD$ 所成角的正弦值.




21.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$,双曲线 $C$ 的右顶点 $A$ 在圆 $O:x^2+y^2=2$ 上,且$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=-2$.

(1)求双曲线 $C$ 的标准方程;

(2)动直线 $l$ 与双曲线 $C$ 恰有 1 个公共点,且与双曲线 $C$ 的两条渐近线分别交于点 $M$、$N$,问 $\triangle OMN$($O$ 为坐标原点)的面积是否为定值?若为定值,求出该定值;若不为定值,试说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

函数 $f(x)=-x^2+ax+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)试讨论函数 $g(x)=f(x)+\frac{3}{2}x^2$ 的极值点的个数;

(2)若 $f(x)\leqslant e^x$ 在定义域内恒成立,证明:

①$a\leqslant e+1$;

②$xe^x+x^3-(e+1)x^2-2x+e>0$.

# 广东省普通高中 2022 届高三 9 月阶段性质量检测·数学

## 参考答案、提示及评分细则

1. B　全称命题的否定是特称命题，所以命题 $p$ 的否定为 $\neg x>2, x^2\geqslant e^x$. 故选 B.

2. D　因为 $A=\left\{x \mid 2^x>\frac{1}{4}, x\in \mathbf{Z}\right\}=\{x \mid x>-2, x\in \mathbf{Z}\}$，若 $a=-1$，则 $2a=-2\notin A$；若 $a=0$，则 $2a=a$，不满足元素的互异性；若 $a=\frac{1}{2}$，则 $a\notin A$；若 $a=1$，$B=\{1,2\}\subseteq A$，故选 D.

3. C　因为函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}} x, x\geqslant 3,\\ 2^x, x<3,\end{cases}$ 所以 $f(81)=f(3^4)=\log_{\frac{1}{3}} 3^4=-\log_3 3^4=-4$，所以 $f(f(81))=f(-4)=2^{-4}=\frac{1}{16}$，故选 C.

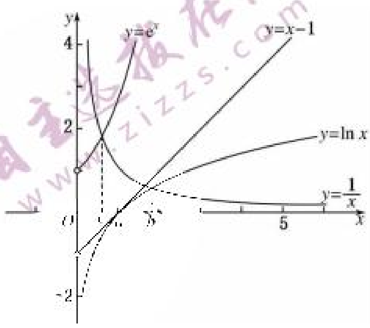
4. A　由题知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称，且 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，其函数图象关于 $y$ 轴对称，故排除选项 C，D；又 $f(-1)=f(1)=0$，故排除选项 B，故选 A.

5. A　若 $p_1, p_2$ 是真命题，则 $p_3, p_4$ 均为假命题，不合题意，故 $p_1, p_2$ 中必有一个假命题，若 $p_1$ 是真命题，$p_2$ 是假命题，由 $p_3$ 是真命题，知 $f(x)$ 的另一个零点为 $x=4$，则 $p_4$ 为假命题，不符合题意；若 $p_1$ 是假命题，则 $p_2$ 是真命题，由 $p_3$ 是真命题，知 $f(x)$ 的另一个零点为 $x=1$，此时 $p_4$ 为真命题，符合题意. 综上，故选 A.

6. B　因为 $h(x)$ 在 $[1,4]$ 上存在单调递减区间，所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-ax-2<0$ 在 $[1,4]$ 上有解，所以当 $x\in[1,4]$ 时，$a>\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$ 有解，而当 $x\in[1,4]$ 时，$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)_{\min}=-1$（此时 $x=1$），所以 $a>-1$，所以 $a$ 的取值范围是 $(-1,+\infty)$. 故选 B.

7. A　因为 $y=f(x+2)$ 与 $y=f(x+7)$ 都为偶函数，所以 $f(x+2)=f(-x+2)$，$f(x+7)=f(-x+7)$，所以 $f(x)$ 图象关于 $x=2$，$x=7$ 轴对称，所以 $f(x)$ 为周期函数，且 $T=2\cdot(7-2)=10$，所以将 $[0,2\ 013]$ 划分为 $[0,10)\cup[10,20)\cup\cdots\cup[2\ 000,2\ 010)\cup[2\ 010,2\ 013]$，而 $[0,10)\cup[10,20)\cup\cdots\cup[2\ 000,2\ 010)$ 共 201 组，所以 $N=201\times 2=402$，在 $[2\ 010,2\ 013]$ 中，含有零点 $f(2\ 011)=f(1)=0$，$f(2\ 013)=f(3)=0$ 共 2 个，所以一共有 404 个零点. 故选 A.

8. C　$\ln a=a-1$，$\ln b=\frac{1}{b}$，$e^c=\frac{1}{c}$. 依次作出 $y=e^x$，$y=\ln x$，$y=x-1$，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象，如图所示. 由图象可知 $0<c<1$，$a=1$，$b>1$，所以 $c<a<b$. 故选 C.




9. AB　当 $m=0$ 时，显然不等式 $4>0$ 成立，满足题意；

当 $m\neq 0$ 时，要使 $p$ 成立，则 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta=(-3m)^2-4\times 4m<0,\end{cases}$ 解得 $0<m<\frac{16}{9}$.

综上可知，$p$ 的充要条件是 $0\leqslant m<\frac{16}{9}$，C 错误；

易知当 $0\leqslant m<\frac{16}{9}$ 时，显然也满足条件 $-1\leqslant m<2$，但反之不成立，所以 A 正确；

当 $m=\frac{2\ 021}{2\ 020}$ 时，满足不等式 $0\leqslant m<\frac{16}{9}$，反之不成立，所以 B 正确；

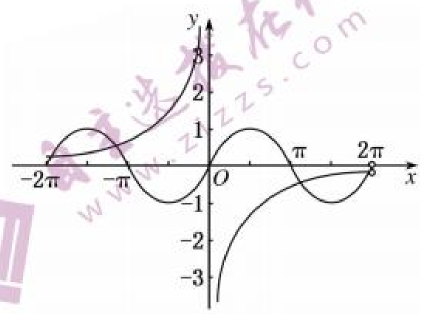
由 $|m|\leqslant 2$ 得 $-2\leqslant m\leqslant 2$，显然它是 $p$ 的必要不充分条件，D 错误.

故选 AB.

10. AB　令 $f(x)=y=2a+\left|\frac{(1-2a)x+3+2a}{x-1}\right|=2a+\left|\frac{4}{x-1}+1-2a\right|$（$a$ 是常数），因为 $x\in[2,5]$，所以 $\frac{4}{x-1}$

$+1\in[2,5]$. 若 $a\leqslant 1$, $f(x)=2a+\frac{4}{x-1}+1-2a=\frac{4}{x-1}+1$ 的最大值为 5,符合题意;当 $1<a\leqslant\frac{5}{2}$ 时,$f(x)$ 的最大值为 $f(2)$ 与 $f(5)$ 中较大的数,由 $f(2)=f(5)$,即 $2a+|5-2a|=2a+|2-2a|$,解得 $a=\frac{7}{4}$,显然当 $1<a\leqslant\frac{7}{4}$ 时,$f(x)$的最大值为 5,当 $a>\frac{7}{4}$ 时,$f(x)$的最大值不为定值. 综上,当 $a\leqslant\frac{7}{4}$ 时,$f(x)$在$[2,5]$上的最大值是 5,结合选项可知,$a$ 的值可能是 0 或 1. 故选 AB.

11. BD 因为 $f(x)$的定义域$[-2\pi,2\pi)$不关于原点对称,所以 $f(x)$为非奇非偶函数. 由题意 $f'(x)=1+\cos x-(\cos x-x\sin x)=1+x\sin x$,当 $x\in[0,\pi)$时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$在$[0,\pi)$上单调递增. 令 $f'(x)=0$,得 $\sin x=-\frac{1}{x}$. 作出 $y=\sin x$,$y=-\frac{1}{x}$在区间$[-2\pi,2\pi)$上的大致图象,如图所示,由图可知,这两个函数的图象在区间$[-2\pi,2\pi)$上共有 4 个公共点,且两图象在这些公共点处都不相切,故 $f(x)$在区间$[-2\pi,2\pi)$上的极值点的个数为 4,且 $f(x)$只有 2 个极大值点. 故选 BD.




12. ACD 由题意 $f(x)-x=(x-1)^2$,即 $f(x)=x^2-x+1$,∴$m=-1$,$n=1$,A 正确;$g(x)=\frac{f(x)}{x}=x+\frac{1}{x}-1$,但当 $x<0$ 时,$f(x)\leqslant-3$,B 错;$f(f(x))>f(x)$,由已知 $f(x)\neq1$,即 $x^2-x+1\neq1$,$x\neq0$ 且 $x\neq1$,C 正确;由题意知 $h(x)$在$[\frac{1}{2},+\infty)$上是增函数,在$(-\infty,\frac{1}{2}]$上是常函数,因此由 $h(x)<h(2x+2)$得 $\frac{1}{2}\leqslant x<2x+2$ 或 $\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\2x+2>\frac{1}{2}\end{cases}$,解得 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{2}$,综上,$x>-\frac{3}{4}$. D 正确. 故应选 ACD.

13. 4 因为 $f(x)=x^3+b$,所以 $f'(x)=3x^2$,由题意得 $3a^2=3(a>0)$,所以 $a=1$,由$(1,1+b)$在切线 $3x-y+2=0$ 上,得 $b=4$.

14. $-\frac{1}{3}$ 因为 $f(x)-x=2f(2-x)$,所以 $f(x)-2f(2-x)=x$,所以 $f(2-x)-2f(x)=2-x$,联立可得 $f(x)=\frac{x-4}{3}$,所以 $f(3)=-\frac{1}{3}$.

15. 18 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,由题意得 $\begin{cases}f(1)=10,\\f'(1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2+a+b+1=10,\\2a+b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=-11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=3.\end{cases}$ 当 $a=-3$,$b=3$ 时,$f'(x)=3(x-1)^2\geqslant0$,$f(x)$无极值. 当 $a=4$,$b=-11$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x_1=1$,$x_2=-\frac{11}{3}$. 当 $x$ 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

| $x$ | $(-\infty,-\frac{11}{3})$ | $-\frac{11}{3}$ | $(-\frac{11}{3},1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以 $f(x)=x^3+4x^2-11x+16$,$f(2)=18$.

16. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 令 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$,则 $h(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=-h(x)$,所以函数 $h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数,所以 $f(\pi^0)=f(1)=f(-1)=0$. 因为 $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$在$(-\infty,0)$上恒成立,所以 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$在$(-\infty,0)$上恒成立. 当 $x<0$ 时,$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}>0$,所以 $h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 因为 $h(-1)=\frac{f(-1)}{g(-1)}=0$,所以 $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 即 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$<h(-1)$，所以 $x<-1$. 当 $x>0$ 时，因为 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 即 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}<h(1)$，又 $h(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=0$，所以 $0<x<1$. 综上，$\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

17. 解：(1)由 $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+4a_{n+1}+4a_n}$ 得 $a_{n+1}^2=a_n^2+4a_{n+1}+4a_n$.

整理得 $(a_{n+1}-a_n-4)(a_{n+1}+a_n)=0$，…… 2 分

又 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $a_{n+1}-a_n=4$，…… 4 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 4 的等差数列. 故 $a_n=4n-1$. …… 5 分

(2)由(1)可知，$S_n=\frac{n(3+4n-1)}{2}=n(2n+1)$，$S_{n+1}=(n+1)(2n+3)$，…… 6 分

所以 $b_n=\frac{n(n+1)}{S_{n+1}S_n}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，…… 8 分

设数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为

$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{6n+9}$. …… 10 分

18. 解：(1)由已知可得，$X$ 的所有可能取值为 0，4，10，

则 $P(X=0)=1-0.8=0.2$，

$P(X=4)=0.8\times(1-0.7)=0.24$，

$P(X=10)=0.8\times0.7=0.56$，

所以 $X$ 的分布列为：

| X | 0 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.24 | 0.56 |

…… 4 分

(2)小明应选择先进行定点投篮考核，理由如下：

由(1)可知小明先进行定点投篮考核，累计得分的期望为 $E(X)=0\times0.2+4\times0.24+10\times0.56=6.56$，…… 6 分

若小明先进行三步篮考核，记 $Y$ 为小明的累计得分，

则 $Y$ 的所有可能取值为 0，6，10，

$P(Y=0)=1-0.7=0.3$，

$P(Y=6)=0.7\times(1-0.8)=0.14$，

$P(Y=10)=0.7\times0.8=0.56$，

则 $Y$ 的期望为 $E(Y)=0\times0.3+6\times0.14+10\times0.48=5.64$，…… 10 分

因为 $E(X)>E(Y)$，

所以为使累计得分的期望最大，小明应选择先进行定点投篮考核. …… 12 分

19. 解：(1)由正弦定理及 $3b=3a\cos C+2c$，得 $3\sin B=3\sin(A+C)=3\sin A\cos C+2\sin C$. …… 2 分

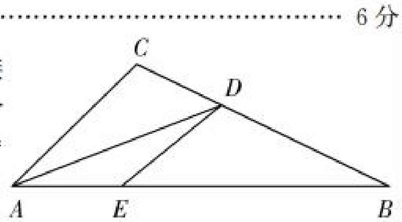
即 $3\sin A\cos C+3\cos A\sin C=3\sin A\cos C+2\sin C$，

即 $3\cos A\sin C=2\sin C$. …… 4 分

因为 $0<C<\pi$，$\sin C\neq0$，

所以 $\cos A=\frac{2}{3}$. …… 6 分

(2)设 $b=t$，则 $c=2t$. 如图，在 $AB$ 上取一点 $E$，使得 $BE=2EA$，连接 $DE$，则 $DE//AC$. …… 8 分




在△$ADE$ 中，$\angle AED=\pi-\angle CAB$，$\cos\angle AED=-\cos\angle CAB=-\frac{2}{3}$，

$AE=\frac{1}{3}c=\frac{2t}{3}$，$DE=\frac{2}{3}b=\frac{2t}{3}$. …… 10 分

由余弦定理得 $AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cos\angle AED$，

即 $10=\frac{4t^2}{9}+\frac{4t^2}{9}-2\times\frac{4t^2}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{40t^2}{27}$,

所以 $t^2=\frac{27}{4}$,$t=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$c=2t=3\sqrt{3}$. ………………………………………… 12 分

20. (1)证明:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $O$ 为 $AC$,$BD$ 的中点, ………………………………………… 1 分

因为 $SB=SD$,$SA=SC$,

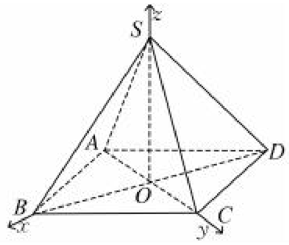
所以 $SO\perp BD$,$SO\perp AC$, ………………………………………… 3 分

又 $BD\cap AC=O$,

所以 $SO\perp$ 底面 $ABCD$, ………………………………………… 4 分

所以 $SO\perp CD$. ………………………………………… 5 分

(2)解:以 $O$ 为原点,分别以 $OB$,$OC$,$OS$ 为 $x$,$y$,$z$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,




设 $SA=AB=2$,则 $OS=OA=OB=OC=OD=\sqrt{2}$,

所以 $O(0,0,0)$,$S(0,0,\sqrt{2})$,$B(\sqrt{2},0,0)$,$C(0,\sqrt{2},0)$,$D(-\sqrt{2},0,0)$,

$A(0,-\sqrt{2},0)$,

所以 $\overrightarrow{SA}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{SB}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{SC}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{SD}=$

$(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$.

设平面 $SAB$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0,\\ \overrightarrow{SB}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$. ………………………………………… 7 分

设平面 $SCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,

$\begin{cases}\overrightarrow{SC}\cdot\boldsymbol{m}=\sqrt{2}b-\sqrt{2}c=0,\\ \overrightarrow{SD}\cdot\boldsymbol{m}=-\sqrt{2}a-\sqrt{2}c=0,\end{cases}$ 令 $a=1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-1)$. ………………………………………… 8 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$, ………………………………………… 10 分

所以 $\sin\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, ………………………………………… 11 分

所以平面 $SAB$ 与平面 $SCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………… 12 分

21. 解:(1)设双曲线 $C$ 的半焦距为 $c$,

由点 $A(a,0)$ 在圆 $O:x^2+y^2=2$ 上,得 $a=\sqrt{2}$,

由 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=(-c-\sqrt{2},0)\cdot(c-\sqrt{2},0)=2-c^2=-2$,得 $c=2$,

所以 $b^2=c^2-a^2=2$,

所以双曲线 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)设直线 $l$ 与 $x$ 轴相交于点 $D$,双曲线 $C$ 的渐近线方程为 $y=\pm x$,

当直线 $l$ 的斜率不存在时,直线 $l$ 为 $x=\pm\sqrt{2}$,$|OD|=\sqrt{2}$,$|MN|=2\sqrt{2}$,得 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|OD|=2$,

当直线 $l$ 的斜率存在时,设其方程为 $y=kx+m$,显然 $k\neq0$,则 $D\left(-\frac{m}{k},0\right)$,

把直线 $l$ 的方程与 $C:x^2-y^2=2$ 联立得 $(k^2-1)x^2+2kmx+m^2+2=0$,

由直线 $l$ 与轨迹 $C$ 有且只有一个公共点,且与双曲线 $C$ 的两条渐近线分别相交可知直线 $l$ 与双曲线的渐近线不平行,所以 $k^2-1\neq0$,且 $m\neq0$,

于是得 $\begin{cases}\Delta=4k^2m^2-4(k^2-1)(m^2+2)=0\\ k^2-1\neq0\end{cases}$,

得 $m^2=2(k^2-1)>0$,得 $k>1$ 或 $k<-1$,

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ y=x \end{cases}$，得 $y_1=\dfrac{m}{1-k}$，

同理得 $y_2=\dfrac{m}{1+k}$，

所以 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|OD||y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{m}{k}\right|\left|\dfrac{m}{1-k}-\dfrac{m}{1+k}\right|=\left|\dfrac{m^2}{1-k^2}\right|=2$.

综上，$\triangle OMN$ 的面积恒为定值 2. ………… 12 分

22. (1)解：由题意得 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+\ln x$，

所以 $g'(x)=x+\dfrac{1}{x}+a=\dfrac{x^2+ax+1}{x}(x>0)$，令 $\Delta=a^2-4$，

当 $\Delta=a^2-4\leqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时，$x^2+ax+1\geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立，

即 $g'(x)=\dfrac{x^2+ax+1}{x}\geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立，此时 $g(x)$ 没有极值点； ………… 2 分

当 $\Delta=a^2-4>0$，即 $a<-2$ 或 $a>2$ 时，

1)$a<-2$ 时，设方程 $x^2+ax+1=0$ 的两个不同实根为 $x_1,x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $x_1+x_2=-a>0$，$x_1x_2=1>0$，故 $x_2>x_1>0$，

所以 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时 $g'(x)>0$；在 $x_1<x<x_2$ 时 $g'(x)<0$，

故 $x_1,x_2$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点.

2)$a>2$ 时，设方程 $x^2+ax+1=0$ 的两个不同实根为 $x_3,x_4$，

则 $x_3+x_4=-a<0$，$x_3x_4=1>0$，故 $x_3<0$，$x_4<0$，

所以 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 没有极值点. ………… 4 分

综上，当 $a<-2$ 时，函数 $g(x)$ 有两个极值点；当 $a\geqslant -2$ 时，函数 $g(x)$ 没有极值点. ………… 5 分

(2)证明：①$f(x)\leqslant e^x \Leftrightarrow e^x-\ln x+x^2\geqslant ax$，

由 $x>0$，得 $a\leqslant\dfrac{e^x+x^2-\ln x}{x}$ 对于 $x>0$ 恒成立，设 $\varphi(x)=\dfrac{e^x+x^2-\ln x}{x}(x>0)$.

$$\varphi'(x)=\frac{\left(e^x+2x-\frac{1}{x}\right)x-(e^x+x^2-\ln x)}{x^2}=\frac{e^x(x-1)+\ln x+(x+1)(x-1)}{x^2}.$$

$\because x>0$，$\therefore x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

$\therefore \varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e+1$，$\therefore a\leqslant e+1$. ………… 9 分

②由①知，当 $a=e+1$ 时有 $f(x)\leqslant e^x$，即 $e^x-\ln x+x^2\geqslant(e+1)x\Leftrightarrow e^x+x^2-(e+1)x\geqslant\ln x$（$*$），当且仅当 $x=1$ 时取等号. ………… 10 分

以下证明：$\ln x+\dfrac{e}{x}\geqslant 2$，设 $\theta(x)=\ln x+\dfrac{e}{x}$，$\theta'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{x^2}=\dfrac{x-e}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,e)$ 时 $\theta'(x)<0$，$\theta(x)$ 单调递减，$x\in(e,+\infty)$ 时 $\theta'(x)>0$，$\theta(x)$ 单调递增，

$\therefore \theta(x)\geqslant\theta(e)=2$，$\therefore \ln x+\dfrac{e}{x}\geqslant 2$（$**$），当且仅当 $x=e$ 时取等号.

由于（$*$）（$**$）等号不同时成立，可得 $e^x+x^2-(e+1)x+\dfrac{e}{x}>2$.

所以 $xe^x+x^3-(e+1)x^2-2x+e>0$. ………… 12 分

# 关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。