江西省五市九校协作体 2023 届第二次联考答案理科数学

一、选择题：BBCA　BADB　CBCD

二、13. $\dfrac{2\pi}{3}$　　14. 132　　15. 2025　　16. $[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e]$

17.【解】(1) 由题意可得 $\sin\angle ADB=\sin(\pi-\angle BDC)=\sin\angle BDC$，因为 BD 为$\angle ABC$ 的角平分线，则 $\angle ABD=\angle CBD$，在$\triangle ABD$ 中，$\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，则 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ADB}$............3 分

同理可得 $\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{\sin\angle CBD}{\sin\angle BDC}$，因此 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CD}{CB}$..6 分

(2) 设 $\angle ABD=\angle CBD=\theta$，则 $\angle ABC=2\theta$，因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$

即 $\dfrac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}c\cdot BD\sin\theta+\dfrac{1}{2}a\cdot BD\cdot\sin\theta$ ....8 分

又 $BD=2$ 且 $c=2a=6$，可得 $\sin 2\theta=\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$，因为 $0<2\theta<\pi$，则 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$

可得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ....10 分

所以，$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$． ....12 分

18【解】(1) 证明：在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=CD=BC=1$，故梯形 $ABCD$ 为等腰梯形，

因为 $\angle BCD=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\angle BAC=\angle ACD=\dfrac{\pi}{6}$

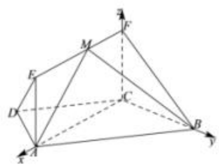
又因为 $\angle ABC=\pi-\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\angle ACB=\pi-\angle ABC-\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore AC\perp BC$.

因为 $CF\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$. $\therefore AC\perp CF$

$\because BC\cap CF=C$，　$\therefore AC\perp$平面 BCF...4 分

因为四边形 $ACFE$ 为矩形，则 $AC\parallel EF$，因此，$EF\perp$平面 BCF...5 分

(2) 因为 $CF\perp$平面 $ABCD$，$AC\perp BC$，以点 C 为坐标原点，CA、CB、CF 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



在 $Rt\triangle ABC$ $AC=\dfrac{BC}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$ ，. . . . . 6 分

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$、$B(0, 1, 0)$、$C(0, 0, 0)$、$F(0, 0, 1)$、$E(\sqrt{3}, 0, 1)$，

设点 $M(t, 0, 1)$，其中 $0\le t\le\sqrt{3}$

设平面 MAB 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AM}=(t-\sqrt{3},0,1)$. . . . . 7 分

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x-y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=(t-\sqrt{3})x+z=0\end{cases}$，取 $x=1$，可得 $\vec{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3}-t)$. . . . . 8 分

易知平面 FCB 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$，$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{4+(t-\sqrt{3})^2}}$. . . . . 10 分

所以，当 $t=0$，即 M 与 F 重合时，$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle$ 取最小值，此时平面 MAB 与平面 FCB 所成锐二面角最大

此时，平面 MAB 与平面 FCB 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. . . . . 12 分

19．解：(1) 因为 $k=2$，所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的可能取值为 0，1，2，3，

因为每个元件的工作相互独立，且正常工作的概率均为 $p=\frac{2}{3}$，所以 $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$ ……………1 分

所以 $P(X=0)=C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$，……………………………………………………2 分

所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

控制系统中正常工作的元件个数 X 的数学期望为 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$ ……………………………………3 分

由题意知，$P_3=C_5^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+C_5^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1+C_5^5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{192}{243}=\frac{64}{81}$ ………5 分

（2）升级改造后单位时间内产量的分布列为

产量	$4a$	0
设备运行概率	P_k	$1-P_k$

所以升级改造后单位时间内产量的均值为 $4ap_k$

产品类型	高端产品	一般产品
产量（单位：件）	ap_k	$3ap_k$
利润（单位：元）	2	1

设备升级后单位时间内的利润为 $y=2ap_k+3ap_k=5ap_k$ ……………………………………………………6 分

因为控制系统中元件总数为奇数，若增加 2 个元件，

则第一类：原系统中至少有 $k+1$ 个元件正常工作，其概率为 $p(1)=p_k-C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}$；……………7 分

第二类：原系统恰好有 k 个元件正常工作，新增 2 个元件中至少有一个正常工作，其概率为

$p(2)=C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}\left[1-(1-p)^2\right]=C_{2k-1}^k p^{k+1}(1-p)^{k-1}(2-p)$ ……………………………………………8 分

第三类：原系统中有 $k-1$ 个元件正常工作，新增 2 个元件全部正常工作，其概率为

$p(3)=C_{2k-1}^k p^{k-1}(1-p)^k\cdot p^2=C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}(1-p)^k$；……………………………………………………9 分

所以 $p_{k+1}=p_k-C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}+C_{2k-1}^k p^{k+1}(1-p)^{k-1}(2-p)+C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}(1-p)^k$

$p_{k+1}=p_k+C_{2k-1}^k p^k(1-p)^k(2p-1)$，即 $p_{k+1}-p_k=C_{2k-1}^k p^k(1-p)^k(2p-1)$，……………………………………10 分

所以当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$p_{k+1}-p_k>0$，p_k 单调递增，即增加元件个数设备正常工作的概率变大…………………11 分

当 $p\le\frac{1}{2}$ 时，$p_{k+1}-p_k\le 0$，即增加元件个数设备正常工作的概率没有变大

又因为 $y=5ap_k$，所以当 $p>\frac{1}{2}$ 时，设备可以通过增加控制系统中元件个数来提高利润；

当 $p\le\frac{1}{2}$ 时，设备不可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润…………………………12 分

20．解：（1）设直线 PQ 与 x 轴交于 $P_0\left(-\frac{p}{2},0\right)$，

由几何性质易得：$\triangle CPP_0$ 与 $\triangle OCP$ 相似，所以 $\frac{|CP|}{|CP_0|}=\frac{|CO|}{|CP|}$，$|CP|^2=|CP_0|\cdot|CO|$

即：$3=\left(-\frac{p}{2}+2\right)\times 2$，解得：$p=1$．所以抛物线 E 的标准方程为：$y^2=2x$…………… …………………3 分

（2）设 $T(x_0, y_0)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

（i）由题意，TA 中点 M 在抛物线 E 上，即 $\left(\frac{y_0+y_1}{2}\right)^2=2\cdot\frac{x_0+x_1}{2}$ …………4 分

又 $y_1^2=2x_1$，将 $x_1=\frac{y_1^2}{2}$ 代入得：$y_1^2-2y_0y_1+4x_0-y_0^2=0$，

同理：$y_2^2-2y_0y_2+4x_0-y_0^2=0$ 有 $\begin{cases}y_1+y_2=2y_0\\ y_1y_2=4x_0-y_0^2\end{cases}$，此时 D 点纵坐标为 $\frac{y_1+y_2}{2}=y_0$ …………6 分

所以直线 TD 的斜率为 0；所以 TD 垂直于 y 轴.

（ii）因为 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{4}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}=\frac{3y_0^2-4x_0}{2}$ …………7 分

所以点 $D\left(\frac{3y_0^2-4x_0}{2},y_0\right)$，此时 $S=\frac{1}{2}|TD|\cdot|y_1-y_2|$ $|TD|=\left|\frac{3y_0^2-4x_0}{2}-x_0\right|=\frac{3}{2}\left|y_0^2-2x_0\right|$，……9 分

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{2}\sqrt{(y_0^2-2x_0)}$.

所以 $S=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(y_0^2-2x_0\right)^3}$ …………10 分

又因为点 T 在圆 C 上，有 $(x_0+2)^2+y_0^2=3$，即 $y_0^2=-x_0^2-4x_0-1$，代入上式可得：

$S=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(-x_0^2-6x_0-1\right)^3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left[-(x_0+3)^2+8\right]^3}$ 由 $-2-\sqrt{3}\le x_0\le -2+\sqrt{3}$．…………11 分

所以 $x_0=-3$ 时，S 取到最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{8^3}=48$．所以 S 的最大值为 48……………12 分

21 解：（1）由 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x+1}$ 可得定义域为（0，+∞），则 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+(a+2)x+1}{(x+1)^2x},x\in(0,+\infty)$ ..1 分

令 $g(x)=x^2+(a+2)x+1$，则 $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2x}$.

①当 $\Delta=a^2+4a\le 0$，即 $-4\le a\le 0$ 时，$g(x)\ge 0$ 恒成立，则 $f'(x)\ge 0$……………2 分

∴$f(x)$ 在（0，+∞）上单调递增；

②当 $\Delta=a^2+4a>0$，即 $a<-4$ 或 $a>0$ 时…………3 分

（i）当 $a<-4$ 时，$g(x)=x^2+(a+2)x+1$ 是开口向上且过（0，1）的抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{a+2}{2}>0$，

则函数 $g(x)$ 有两个零点 $x_1=\frac{-(a+2)-\sqrt{a^2+4a}}{2}$ 和 $x_2=\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+4a}}{2}$（显然 $x_1<x_2$），列表如下：

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

…………4 分

（ii）当 $a>0$ 时，$g(x)=x^2+(a+2)x+1$ 是开口向上且过（0，1）的抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{a+2}{2}<0$，则 $g(x)>0$ 在（0，+∞）上恒成立，从而 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在（0，+∞）上单调递增

综上所述，当 $a\ge -4$ 时，函数 $f(x)$ 在区间（0，+∞）上单调递增；

当 $a<-4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-(a+2)-\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)$，$\left(\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+4a}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{-(a+2)-\sqrt{a^2+4a}}{2},\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+4a}}{2}\right)$ 上单调递减…………5 分

（2）由（1）可知，当 $a<-4$ 时，$f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，则 x_1，x_2 是方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 的两根，∴$x_1+x_2=-(a+2)$，$x_1x_2=1$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1-\dfrac{a}{x_1+1}+\ln x_2-\dfrac{a}{x_2+1}=\ln x_1x_2-\dfrac{a(x_1+x_2+2)}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=-a$. ……………7 分

$\therefore ke^{f(x_1)+f(x_2)-4}+\ln\dfrac{k}{x_1+x_2-2}\geq 0$ 恒成立转化为 $ke^{-a-4}+\ln\dfrac{k}{-a-4}\geq 0$ 恒成立.

令 $x=-a-4>0$，不等式转化为 $ke^x+\ln\dfrac{k}{x}\geq 0$ ………………………8 分

$\therefore ke^x+\ln k-\ln x\geq 0$，$ke^x+\ln k+x\geq x+\ln x$，即 $ke^x+\ln(ke^x)\geq x+\ln x$.

令 $h(x)=x+\ln x(x>0)$，则不等式化为 $h(ke^x)\geq h(x)$. ……………………………………9 分

$\because h'(x)=1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore ke^x\geq x$，即 $k\geq\dfrac{x}{e^x}$. 令 $m(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则 $m'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$……………………………10 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$m'(x)>0$，即 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，即 $m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减；……………………11 分

所以 $m(x)_{\max}=m(1)=\dfrac{1}{e}$，$\therefore x=-a-4=1$，即 $a=-5$ 时，实数 k 取得最小值为 $\dfrac{1}{e}$.

即实数 k 的最小值为 $\dfrac{1}{e}$. ……………………………………………………12 分

22 解：（1）曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=8\sin\theta$，根据 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，转换为直角坐标方程为 $x^2=8y$……………………………3 分

（2）把直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数 $0\leq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$），代入方程 $x^2=8y$；

得到 $t^2\cos^2\alpha-8t\sin\alpha-16=0$……………………………………………5 分

整理得 $t_1+t_2=\dfrac{8\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$，$t_1t_2=-\dfrac{16}{\cos^2\alpha}$ 故 $|AB|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\dfrac{8}{\cos^2\alpha}$，……………8 分

当 $\alpha=0$ 时，最小值为 8……………………………………………10 分

23.（1）依题意：a,b,c 都为正实数，且 $abc=1$，

$a^2+b^2\geq 2ab,b^2+c^2\geq 2bc,a^2+c^2\geq 2ac$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立……………2 分

上述三个式子相加得 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac=\dfrac{ab}{abc}+\dfrac{bc}{abc}+\dfrac{ac}{abc}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

即 $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 成立……………………………………5 分

（2）法一：$\because a$，b，c 都为正整数，且 $abc=1$.

$\therefore a^3+b^3+c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3$，由题意得 $\begin{cases}\dfrac{b^6}{a^3+1}+\dfrac{1}{4}(a^3+1)\geq b^3,\cdots① \\ \dfrac{c^6}{b^3+1}+\dfrac{1}{4}(b^3+1)\geq c^3,\cdots② \\ \dfrac{a^6}{c^3+1}+\dfrac{1}{4}(c^3+1)\geq a^3,\cdots③\end{cases}$ ……………………8 分

①+②+③，得 $\dfrac{b^6}{a^3+1}+\dfrac{c^6}{b^3+1}+\dfrac{a^6}{c^3+1}\geq\dfrac{3}{4}(a^3+b^3+c^3)-\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时“=”成立. .....10 分

法二：由 Cauchy 不等式，得 $\left(\dfrac{b^6}{a^3+1}+\dfrac{c^6}{b^3+1}+\dfrac{a^6}{c^3+1}\right)\left[(a^3+1)+(b^3+1)+(c^3+1)\right]\geq(a^3+b^3+c^3)^2$......7 分

令 $t=a^3+b^3+c^3\geq 3$，则 $\dfrac{b^6}{a^3+1}+\dfrac{c^6}{b^3+1}+\dfrac{a^6}{c^3+1}\geq\dfrac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^3+b^3+c^3+3}=\dfrac{t^2}{t+3}=t+3+\dfrac{9}{t+3}-6$.

令 $g(t)=t+3+\dfrac{9}{t+3}-6$，则 $g(t)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增. ……………………9 分

$\therefore g(t)\geq\dfrac{3}{2}$，即 $\dfrac{b^6}{a^3+1}+\dfrac{c^6}{b^3+1}+\dfrac{a^6}{c^3+1}\geq\dfrac{3}{2}$. ……………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。