宜宾市2020级高三第三次诊断性试题
数　学（理工类）参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	C	D	D	A	C	A	B	D	C

10. 当$x\geqslant 0$时，$f(x)=2x^3-3x^2$，$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，令$f'(x)=0$，$x=1$，

$f(x)$在上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=-1$，

$\because y=f(x)$的最小值为-1，$\therefore$当$x<0$时，$f(x)_{\min}\geqslant -1$.

当$x<0$时，$f(x)=(x-m)^2-2$.

①若$m\geqslant 0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，$f(x)>f(0)=m^2-2$，$m^2-2\geqslant -1$，$m\geqslant 1$.

②若$m<0$，$f(x)$在$(-\infty,m)$上单调递减，在$(m,0)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(m)=-2$，舍去.

综上$m\geqslant 1$.

11. 不妨设$DA=2,DH=1$，则$DK=DJ=1$，$HK=KJ=JH=\sqrt{2}$，

过点D作$DO\perp$面HKJ，在$Rt\triangle DOH$中，$\because HO=\dfrac{\sqrt{6}}{3},DH=1$，$\therefore DO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$V_{D-HKJ}=\dfrac{1}{3}S_{HKJ}\cdot DO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{6}.V_{正方体}=S\cdot EG=2\times 2\times 2=8$，

$\dfrac{V_{D-HKJ}}{V_{正方体}}=\dfrac{EF\cdot S}{EG\cdot S}=\dfrac{EF}{EG}$，$\dfrac{V_{D-HKJ}}{V_{正方体}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{8}=\dfrac{1}{48}$，$\dfrac{EF}{EG}=\dfrac{1}{48}$.

12. $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\cos A}{2-\cos C}$，$\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\cos A}{2-\cos C}$，$2\sin A-\sin A\cos C=\cos A\sin C$，$2\sin A=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$2\sin A=\sin(A+C)$，$2\sin A=\sin B$，$b=2a$.

设$A(0,0),B(2,0),C(x,y)$，$\because b=2a$，$\therefore |AC|=2|BC|$，$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，

$\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$，点$C$的轨迹是以$\left(\dfrac{8}{3},0\right)$为圆心，半径为$\dfrac{4}{3}$的圆.

过C作$CD\perp AB$，当CD最大时，$S_{\triangle ABC}$有最大值，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}$

二、填空题

13.150；　　　　14.0；　　　　15.$\dfrac{1+\ln 2}{2}$；　　　　16.18 .

15.$f(x_1)=g(x_2)$，$\ln x_1=2x_2$，$x_2=\dfrac{\ln x_1}{2}$，$x_1-x_2=x_1-\dfrac{\ln x_1}{2}$，

令$h(x)=x-\dfrac{\ln x}{2}$，$h'(x)=1-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x-1}{2x}$，令$h'(x)=0$，$x=\dfrac{1}{2}$，

$h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$单调递增.$h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1+\ln 2}{2}$.

16. 因为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{4}{3}$

所以$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，渐近线$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

不妨设$a=\sqrt{3}m,b=m,c=2m$，双曲线的方程$\dfrac{x^2}{3m^2}-\dfrac{y^2}{m^2}=1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

所以 $AB:x=2m-\frac{y}{\sqrt{3}}$

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{3m^2}-\frac{y^2}{m^2}=1\\ y=-\sqrt{3}(x-2m)\end{cases}$ 得 $8y^2+4\sqrt{3}my-3m^2=0$

$y_1=\frac{3m-\sqrt{3}m}{4},y_2=\frac{-3m-\sqrt{3}m}{4}$

所以 $\frac{AF_2}{BF_2}=\frac{|y_1|}{|y_2|}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$BF_2=\frac{3+\sqrt{3}}{2},AB=AF_2+BF_2=3=\sqrt{1+\frac{1}{3}}|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\frac{3m}{2}=3$

$m=\sqrt{3}$

所以 $a=3$

$AF_1+BF_1+AB=2(AF_2+BF_2)+4a=18$

三、解答题

17.(1) 选①

$\because \frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$,

$\therefore \frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{\sin B\cos B}{\cos^2 B}$, $\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}$,

$\sin A\cos B=\sin B-\cos A\sin B$, $\sin(A+B)=\sin B$, $\sin C=\sin B$, $B=C$. ....6 分

选②

$\because \sin C\sin(B-A)=\sin B\sin(C-A)$,

$\therefore \sin C(\sin B\cos A-\cos B\sin A)=\sin B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$

$\sin C\sin B\cos A-\sin C\cos B\sin A=\sin B\sin C\cos A-\sin B\cos C\sin A$

$-\sin C\cos B\sin A=-\sin B\cos C\sin A$

$\sin C\cos B=\sin B\cos C$

$\sin C\cos B-\sin B\cos C=0$

$\sin(C-B)=0$

$\therefore B=C$. ....6 分

(2) $\frac{2a+b}{c}+\frac{1}{\cos B}=\frac{2\sin A+\sin B}{\sin C}+\frac{1}{\cos B}$

$=\frac{2\sin(B+C)+\sin B}{\sin C}+\frac{1}{\cos B}=\frac{2\sin(2B)+\sin B}{\sin B}+\frac{1}{\cos B}$

$=\frac{4\sin B\cos B+\sin B}{\sin B}+\frac{1}{\cos B}$

$=4\cos B+\frac{1}{\cos B}+1$ ....10 分

$\geqslant 2\sqrt{4}+1=5$，当且仅当 $4\cos B=\frac{1}{\cos B}$ 时，

即 $\cos B=\frac{1}{2}$ 时，等号成立. ....12 分

18.(1) $\bar{x}=\frac{100}{10}=10,\bar{y}=\frac{600}{10}=60$,

$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}=8264-10\times 10\times 60=2264$, ...4 分

$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2=1400-10\times 10\times 10=400$,

$\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\bar{y}^2=49200-10\times 60^2=13200$，

$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{2264}{\sqrt{400\times 13200}}=\dfrac{2264}{400\times\sqrt{33}}\approx\dfrac{2264}{2298}\approx 0.99$，……………8 分

故两个变量线性相关程度较高.

(2) 设该地芯片企业的总营业收入的估计值为 m，$\dfrac{100}{600}=\dfrac{268}{m}$，$m=1608$. ……………12 分

19.(1) 作 DE 中点 O, 连接 AO,

$\because$ 平面 EFG // 平面 ABD, 平面 $EFG\cap$ 平面 $ABC=FG$, 平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$

$\therefore AB$ // FG

同理 BD // EF，$\because DE \underline{\parallel} \dfrac{1}{2}BC$, $\therefore F$ 为 BC 中点，$\therefore G$ 为 AC 的中点，

$\therefore GE\perp AC$，$OF\perp BC$，……………………………………………………2 分

$\because AO\perp$ 平面 $BCED$，$\therefore AO\perp BC$

$\because AO\cap FO=O$, $\therefore BC\perp$ 平面 AOF，$\therefore BC\perp AF$，$\therefore GF=GA=\dfrac{1}{2}AC$,

$FC=EC$, GE 是公共边，，$\therefore \Delta GEA\cong\Delta GEF$，$\therefore \angle FGE=\angle AGE=90^0$ ……………5 分

，又 $AC\cap GF=G$，$\therefore EG\perp$ 面 ABC ……………………………………6 分

(2)由 (1) 知 F,G 分别为 BC,AC 中点，$\because$ 面 $ADE\perp$ 面 $BCED$,

连接 OF, $AO\perp DE$ $\therefore AO\perp$ 面 $BCDE$ 建立如图所示空间直角坐标系 $o-xyz$

令 $BC=4a$, 则 $O(0,0,0)$ $A(0,0,\sqrt{3}a)$ $B(\sqrt{3}a,-2a,0)$ $C(\sqrt{3}a,2a,0)$ $D(0,-a,0)$

$E(0,a,0)$ $F(\sqrt{3}a,0,0)$ $G\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2},a,\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$

设 $\dfrac{AH}{AD}=\lambda$, $H(x,y,z)$，$(x,y,z-\sqrt{3}a)=\lambda(0,-a,-\sqrt{3}a)$，

$\therefore\begin{cases}x=0\\ y=-\lambda a\\ z=\sqrt{3}a(1-\lambda)\end{cases}$ $\therefore H(0,-\lambda a,\sqrt{3}a(1-\lambda))$ ……………………7 分

设面 EFG 的法向量 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{EF}=(\sqrt{3}a,-a,0)$ $\overrightarrow{EG}=\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$

$\begin{cases}\sqrt{3}ax_1-ay_1=0\\ \dfrac{\sqrt{3}a}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{3}a}{2}y_1=0\end{cases}$ $\therefore \vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$，……………………9 分

$\overrightarrow{FH}=(-\sqrt{3}a,-\lambda a,\sqrt{3}a(1-\lambda))$

$\therefore \dfrac{\sqrt{15}}{5}=\left|\dfrac{-\sqrt{3}a-\sqrt{3}a\lambda-\sqrt{3}a(1-\lambda)}{\sqrt{5}\sqrt{3a^2+\lambda^2a^2+3a(1-\lambda)^2}}\right|\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}$ 或 1 ……………12 分

20. 解：(1) 设点 $A(x,y)$，$x>0$,

$\because AB$，AC 的斜率之积是 3 $\therefore \dfrac{y}{x+1}\cdot\dfrac{y}{x-1}=3(x\neq 1)$. ……………2 分

$\therefore$ 点 A 的轨迹 D 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x>1)$ ……………4 分

(2) 由 $\begin{cases}x^2=2py\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x>1)\end{cases}$

得 $y^2-6py+3=0$, $\Delta=36p^2-12>0$, $p>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=6p,y_1y_2=3$，……6 分

$\because x_1^2=2py_1,x_2^2=2py_2$，$\therefore x_1x_2=\sqrt{2py_1}\cdot\sqrt{2py_2}=2\sqrt{3}p$，

$\because k_{EF}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{2p(x_1-x_2)}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}$，

$\therefore$ 直线 EF 的方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1+x_2}{2p}(x-x_1)$，

即 $y=\dfrac{x_1+x_2}{2p}x-\dfrac{x_1+x_2}{2p}x_1+y_1=\dfrac{x_1+x_2}{2p}x-\dfrac{x_1x_2}{2p}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}x-\sqrt{3}$，

$\therefore$ 直线 EF 过定点 $P(0,-\sqrt{3})$，……10 分

当 G 为 BP 的中点时，$\because BH\perp EF$ 于 H，$\therefore |GH|=\dfrac{1}{2}|BP|=1$

$\therefore$ 存在定点 $G\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，使 $|HG|$ 为常数……12 分

21.

法一：函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=m(\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x})+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}(x-1)\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-m\right)$

令 $u(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-m,u'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$

所以 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，$(1,+\infty)$ 单增

$u_{\min}=u(1)=\mathrm{e}-m$

①$m\leqslant\mathrm{e}$ 时，$u_{\min}\geqslant 0,u(x)\geqslant 0$

此时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，$(1,+\infty)$ 单增，有 1 个极小值点……2 分

②$m>\mathrm{e}$ 时，$u_{\min}<0$

当 $x<\dfrac{1}{m-1}<1$ 时，$u(x)>\dfrac{x+1}{x}-m=1+\dfrac{1}{x}-m>0$，此时 $\exists\, x_1\in(0,1)$，使得 $u(x_1)=0$

当 $x>m>\mathrm{e}$ 时，$u(x)>\dfrac{x^2}{x}-m=x-m>0$，此时 $\exists\, x_2\in(1,+\infty)$，使得 $u(x_2)=0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单减，$(x_1,1)$ 单增，$(1,x_2)$ 单减，$(x_2,+\infty)$ 单增

$f(x)$ 有 3 个极值点……5 分

(2)由(1)得

①当 $0<m\leqslant\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，$(1,+\infty)$ 单增

$f_{\min}=f(1)=\dfrac{m}{\mathrm{e}}+1=1+\ln m$

所以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{\ln m}{m}$

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，在 $(0,\mathrm{e})$ 单增，$(\mathrm{e},+\infty)$ 单减

$g_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

所以 $m=\mathrm{e}$；……7 分

②当 $m>\mathrm{e}$ 时，$\exists\, x_1\in(0,1)$，使得 $u(x_1)=0$，$\exists\, x_2\in(1,+\infty)$，使得 $u(x_2)=0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单减，$(x_1,1)$ 单增，$(1,x_2)$ 单减，$(x_2,+\infty)$ 单增，

其中 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_i}}{x_i}-m=0(\mathrm{i}=1,2)\Leftrightarrow x_i=\ln m+\ln x_i$ ……9 分

所以 $f_{\min}=\min\{f(x_1),f(x_2)\}=1+\ln m$

而 $f(x_i)=\dfrac{mx_i}{\mathrm{e}^{x_i}}+x_i-\ln x_i=1+\ln m$ 符合要求

所以 $m>\mathrm{e}$

综上 $m\geqslant e$ ......12 分

法二：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=me^{-x}(1-x)+1-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(1-mxe^{-x})}{x}.$$

记 $u(x)=1-mxe^{-x}, v(x)=xe^{-x}$.

$v'(x)=\frac{1-x}{e^x}$ 可知 $v(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $v_{\max}=v(1)=\frac{1}{e}$.

①$m\leqslant 0$. 则 $u(x)\geqslant 1>0$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，恰有 $x=1$ 一个极值点.

②$0<m\leqslant e$. 则 $u(x)\geqslant 1-\frac{m}{e}\geqslant 0$. 所以 $f(x)$ 恰有 $x=1$ 一个极值点. ......2 分

③$m>e$. 因为 $u(0)>0, u(1)<0, u(m)>0$, 所以存在 $x_1\in(0,1), x_2\in(1,m)$ 使得 $u(x_1)=u(x_2)=0$. $f(x)$ 在 $(0,x_1),(x_1,1)$ 上单调递增，$(x_1,1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $f(x)$ 恰三个极值点. ......5 分

综上，$m\leqslant e$ 时，$f(x)$ 恰有一个极值点；$m>e$ 时，$f(x)$ 恰有三个极值点.

(2) 先证明：$f(x)\geqslant 1+\ln m$.

这等价于证明：

$$x-\ln x-\ln m\geqslant 1-mxe^{-x}.$$

即

$$\ln\frac{e^x}{xm}\geqslant 1-\frac{xm}{e^x}. \quad \text{......7 分}$$

令 $g(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}$，则 $g'(t)=\frac{t-1}{t^2}$ 可知 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(t)\geqslant g(1)=0$. 所以 $\ln t\geqslant 1-\frac{1}{t}$. 在这里令 $t=\frac{e^x}{mx}$，就有

$$\ln\frac{e^x}{mx}\geqslant 1-\frac{xm}{e^x}. \quad \text{......9 分}$$

因此，要使 $1+\ln m$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最小值，只需要上式可以取得等号. 即：$t=\frac{e^x}{mx}=1$ 能成立，

$$0<m=\frac{e^x}{x}=\frac{1}{v(x)}$$

有解. 利用 (1) 中对 $v(x)$ 的讨论，可知 $m\geqslant e$ 即可. ......12 分

所以，m 的所有可能值是 $[e,+\infty)$ 上的实数.

22.(1) 由 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ 得 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$, $\therefore x^2+y^2-2\sqrt{2}x+1=0$ ......2 分

$\therefore$ 圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{2}\cos\theta\rho+1=0$ ......5 分

.(2) $\theta=\beta$ 代入 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos\beta+1=0$，$\therefore \rho_1+\rho_2=2\sqrt{2}\cos\beta$

$\therefore |OA|+|OB|=2\sqrt{2}\cos\beta$ ......7 分

同理，$|OC|+|OD|=2\sqrt{2}\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$ ......8 分

$\therefore \frac{|OC|+|OD|}{|OA|+|OB|}=\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\cos\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\beta$ ......9 分

$\because -\frac{\pi}{4}<\beta<0$，$\therefore \tan\beta\in(-1,0)$

$\therefore \dfrac{|OC|+|OD|}{|OA|+|OB|}$的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ 10分

23. (1)$f(x)=2|x+a|-2|x-b|\leqslant 2|(x+a)-(x-b)|=2|a+b|$， 2分

当$x=b$时取等号，$\because a>0$，$b>0$，$\therefore |a+b|=a+b$，$\therefore$ 由题可知$2(a+b)=2$，$\therefore a+b=1$

....5分

(2)$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)(a+b)=5+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}=9(a>0,b>0)$ 7分

$\dfrac{4}{(3a+1)b}=\dfrac{12}{(3a+1)3b}\geqslant 12\left(\dfrac{2}{3a+3b+1}\right)^2=3$， 9分

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{4}{(3a+1)b}\geqslant 12$， 10分