2018年全国高中数学联赛（重庆赛区）预赛试题参考答案

一、填空题：本大题共6小题，每小题8分，共48分，把答案填在横线上.

1. 设集合 $A=\{a-1,\ 2\log_2 b\}$ 与 $B=\{a+1,\ \log_2(16b-64)\}$ 恰有一个公共元素为 a，则实数 $a=$________.

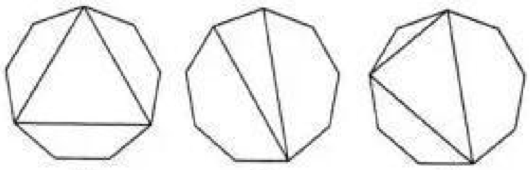
答案：6

解析：因为 $a-1\neq a$、$a+1\neq a$，所以公共元素为 $2\log_2 b=\log_2(16b-64)$，解得 $b=8$，$a=2\log_2 b=6$。

2. 从正九边形中任取三个顶点构成三角形，则正九边形的中心在三角形内的概率为________.

答案：$\dfrac{5}{14}$

解析：如图，正9边形中包含中心的三角形有以下三种形状：



(1)　(2)　(3)

对于（1），有3种情况；对于（2），有9种情况；对于（3），有18种情况；故所求概率为

$$P=\frac{3+9+18}{C_9^3}=\frac{5}{14}$$

3. 设$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$，点P是线段AB上的一个动点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\ge\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，则实数$\lambda$的取值范围是________.

答案：$[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

解析：$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1-\lambda,\lambda)$，则$\overrightarrow{PB}=(\lambda-1,1-\lambda)$，$\overrightarrow{PA}=(\lambda,-\lambda)$，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\ge\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\Leftrightarrow(1-\lambda,\lambda)\cdot(-1,1)\ge(\lambda,-\lambda)\cdot(\lambda-1,1-\lambda)\Rightarrow 2\lambda^2-4\lambda+1\le 0$，解得：$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\lambda\le 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，因点$P$是线段$AB$上的一个动点，所以$0\le\lambda\le 1$，综上，满足条件的$\lambda$的取值范围是$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\lambda\le 1$

4. 顶点为P的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A是底面圆周上的点，B是底面圆内的点，O为底面圆圆心，$AB\perp OB$，垂足为B，$OH\perp HB$，垂足为H，且$PA=4$，C为PA的中点，则当三棱锥$O-HPC$的体积最大时，OB的长为______.

答案：$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

法一：AB⊥OB，⇒PB⊥AB，⇒AB⊥面POB，⇒面PAB⊥面POB．OH⊥PB，⇒OH⊥面PAB，⇒OH⊥HC，OH⊥PC，又，PC⊥OC，⇒PC⊥面OCH．⇒PC是三棱锥P−OCH的高．PC=OC=2．而ΔOCH的面积在OH=HC=$\sqrt{2}$时取得最大值

解：在复平面内，设 $A(4,0)$、$B(0,-3)$，P 为单位圆上的点，问题转化为求 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最小值，设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，其中 $\alpha\in R$

$$|PA|^2+|PB|^2=(\cos\alpha-4)^2+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+(\sin\alpha+3)^2=27+6\sin\alpha-8\cos\alpha$$

$$=27+10\sin(\alpha+\varphi)\geq 17$$

由于 $\alpha\in R$，必存在 α 使 $\sin(\alpha+\varphi)=-1$，即等号可以取到.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A+\sin^2 C=2018\sin^2 B$，则 $\dfrac{(\tan A+\tan C)\tan^2 B}{\tan A+\tan B+\tan C}=$________.

答案：$\dfrac{2}{2017}$

解析：因为 $\sin^2 A+\sin^2 C=2018\sin^2 B$

所以 $a^2+c^2=2018\cdot b^2$

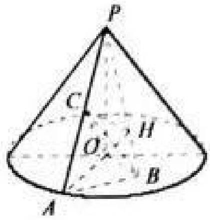
注意到：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

故 $\dfrac{(\tan A+\tan C)\tan^2 B}{\tan A+\tan B+\tan C}$

$$=\frac{(\tan A+\tan C)\tan^2 B}{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}=\left(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}\right)\tan B$$

$$=\frac{\sin^2 B}{\sin A\cdot\sin C}\cdot\frac{1}{\cos B}=\frac{b^2}{ac}\left(\frac{2ac}{a^2+c^2-b^2}\right)=\frac{2b^2}{2018b^2-b^2}=\frac{2}{2017}$$

$OH=\sqrt{2}$时，由 $PO=2\sqrt{2}$，知$\angle OPB=30°$，$OB=PO\tan30°=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.



法二：连线如图，由 C 为 PA 中点，故 $V_{O-PBC}=\dfrac{1}{2}V_{B-AOP}$，

而 $V_{O-PHC}:V_{O-PBC}=\dfrac{PH}{PB}=\dfrac{PO^2}{PB^2}(PO^2=PH\cdot PB)$.

记 $PO=OA=2\sqrt{2}=R$，$\angle AOB=\alpha$，

则 $V_{P-AOB}=\dfrac{1}{6}R^3\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{12}R^3\sin2\alpha$，$V_{B-PCO}=\dfrac{1}{24}R^3\sin2\alpha$. $\dfrac{PO^2}{PB^2}=\dfrac{R^2}{R^2+R^2\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{1+\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{3+\cos2\alpha}$. $\Rightarrow V_{O-PHC}=\dfrac{\sin2\alpha}{3+\cos2\alpha}\times\dfrac{1}{12}R^3$. ∴ 令

$y=\dfrac{\sin2\alpha}{3+\cos2\alpha}$，$y'=\dfrac{2\cos2\alpha(3+\cos2\alpha)-(-2\sin2\alpha)\sin2\alpha}{(3+\cos2\alpha)^2}=0$，得 $\cos2\alpha=-\dfrac{1}{3}$，

$\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $OB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

5. 已知复数 z 的模为1，则 $|z-4|^2+|z+3i|^2$ 的最小值为__________.

答案：17

二、解答题：本大题共 4 小题，第 7、8 题各 16 分，第 9、10 题各 20 分，共 72 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

7.（满分 16 分）设 $f(m)$ 是正整数 m 的各位数字的乘积，求方程 $f(m)=m^2-10m-36$ 的正整数解.

解：设 m 是 n 位正整数，若 $n\ge 3$，则 $m\ge 10^{n-1}\ge 100$，

$\therefore 9^n\ge f(m)=m^2-10m-36=m(m-10)-36\ge 90m-36\ge 9\cdot 10^n-36>10^n$ 矛盾. 此时无解. …… 4 分

若 $n=1$，则 $f(m)=m=m^2-10m-36$，此方程无整数解. ……8 分

若 $n=2$，且 $m\ge 20$，则 $81\ge f(m)=m^2-10m-36\ge 400-200-36=164$ 矛盾

$\therefore m\in[10,19]$， …… 12 分

设 $m=10+k$，$f(m)=(10+k)^2-10(10+k)-36=k$，解得 $k=3$，

综上，方程的解为 $m=13$. …… 16 分

8.（满分 16 分）设 $a_1=2$、$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$. 证明：$1-\dfrac{1}{2018^{2018}}<\sum\limits_{n=1}^{2018}\dfrac{1}{a_n}<1$.

证明：由递推式得 $a_{n+1}-1=a_n^2-a_n=a_n(a_n-1)$ 所以

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

从而得

$$\sum_{n=1}^{2018}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{2018}\left(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{a_{2019}-1}.$$ …… 4 分

又 $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$

得数列 $\{a_n\}$ 单调递增，所以 $a_n\ge a_1=2$.

特别地 $\sum_{k=1}^{2018}\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_{2019}-1}<1.$ …… 8 分

由递推式可得 $a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}$. 从而

$a_1\cdot a_2\cdots a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_1-1}=a_{n+1}-1.$ …… 12 分

由均值不等式及已证结论有

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}}.$$

所以 $a_1\cdot a_2\cdots a_n>n^n$

特别地 $a_{2019}-1=a_1\cdot a_2\cdots a_{2018}>2018^{2018}$

故 $\sum_{k=1}^{2018}\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_{2019}-1}>1-\frac{1}{2018^{2018}}.$ …… 16 分

9. (满分 20 分) 设椭圆 C 的左、右顶点为 A, $B(a,0)$，过右焦点 $F(1,0)$ 作非水平直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点，记直线 AP,BQ 的斜率分别为 k_1,k_2，试证：$\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值，并求此定值(用 a 的函数表示).

证明：设 $l:x=ty+1$，代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$ 得

$$((a^2-1)t^2+a^2)y^2+2(a^2-1)ty-(a^2-1)^2=0,$$

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则

$$y_1+y_2=-\frac{2(a^2-1)t}{(a^2-1)t^2+a^2},\quad y_1y_2=-\frac{(a^2-1)^2}{(a^2-1)t^2+a^2}. \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

两式相除得

$$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{2}{a^2-1}t,\qquad ty_1y_2=\frac{a^2-1}{2}(y_1+y_2).$$

由题意知

$$k_1=\frac{y_1}{x_1+a}=\frac{y_1}{ty_1+a+1},\qquad k_2=\frac{y_2}{x_2-a}=\frac{y_2}{ty_2-a+1}. \qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

从而

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(ty_2-a+1)}{y_2(ty_1+a+1)}=\frac{(a^2-1)(y_1+y_2)/2-ay_1+y_1}{(a^2-1)(y_1+y_2)/2+ay_2+y_2}.$$

$$=\frac{(a^2-2a+1)y_1+(a^2-1)y_2}{(a^2-1)y_1+(a^2+2a+1)y_2}. \qquad \cdots\cdots 15\text{ 分}$$

因为 $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}=\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{a^2-1}{a^2+2a+1}$

所以 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{a-1}{a+1}$. $\qquad \cdots\cdots 20$ 分

10. （满分 20 分）设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ （$a\neq 0$）满足

$|f(0)|\le 2$，$|f(2)|\le 2$，$|f(-2)|\le 2$，

求当 $x\in[-2,2]$ 时 $y=|f(x)|$ 的最大值.

解：由题意知 $\begin{cases} c=f(0) \\ 4a+2b+c=f(2) \\ 4a-2b+c=f(-2) \end{cases}$，解得 $\begin{cases} c=f(0) \\ a=\dfrac{f(2)+f(-2)-2f(0)}{8} \\ b=\dfrac{f(2)-f(-2)}{4} \end{cases}$

从而当 $x\in[-2,2]$ 时，

$$y=|f(x)|=\left|\frac{f(2)+f(-2)-2f(0)}{8}x^2+\frac{f(2)-f(-2)}{4}x+f(0)\right|$$

$$=\left|\frac{x^2+2x}{8}f(2)+\frac{x^2-2x}{8}f(-2)+\frac{4-x^2}{4}f(0)\right|$$

$$\le\left|\frac{x^2+2x}{4}\right|+\left|\frac{x^2-2x}{4}\right|+\frac{4-x^2}{2}. \qquad \cdots\cdots 5 \text{分}$$

因为 $x\in[-2,2]$ 时 $\dfrac{x^2+2x}{4}\cdot\dfrac{x^2-2x}{4}\le 0$，从而

$|f(x)|\le\left|\frac{x^2+2x}{4}\right|+\left|\frac{x^2-2x}{4}\right|+\frac{4-x^2}{2}=\left|\frac{x^2+2x}{4}-\frac{x^2-2x}{4}\right|+\frac{4-x^2}{2}$

$=-\frac{x^2}{2}+|x|+2$. ……10 分

易知当 $x\in[0,2]$ 时 $-\frac{x^2}{2}+|x|+2=-\frac{x^2}{2}+x+2\le\frac{5}{2}$

当 $x\in[-2,0]$ 时 $-\frac{x^2}{2}+|x|+2=-\frac{x^2}{2}-x+2\le\frac{5}{2}$ 得

$\max\limits_{|x|\le2}|f(x)|\le\max\limits_{|x|\le2}(-\frac{x^2}{2}+|x|+2)\le\frac{5}{2}$. …… 15 分

最后取 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+2$，则 $|f(2)|=|f(-2)|=|f(0)|=2$.

故该函数满足题设条件且在 $[-2,2]$ 上能取到最大值 $\frac{5}{2}$. 因此 $y=|f(x)|$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$. ……20 分