

湖南师大附中 2024 届高三三月考试卷(二)

# 数 学

命题人:曾克平 周艳军 钱华 周煌

时量:120 分钟 满分:150 分

得分:\_\_\_\_\_

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合  $A = \{x | y = \lg(x+1)\}$ ,  $B = \{y | y = -2^x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $(-1, 0)$       B.  $(-1, +\infty)$       C.  $\mathbf{R}$       D.  $(-\infty, 0)$
- 使“ $a > b$ ”成立的一个充分不必要条件是  
A.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$       B.  $a^3 > b^3$       C.  $a^2 > b^2$       D.  $ac^2 > bc^2$
- 已知圆锥的侧面积(单位:  $\text{cm}^2$ )为  $2\pi$ , 且它的侧面展开图是一个半圆, 则这个圆锥的底面半径(单位:  $\text{cm}$ )是  
A. 2      B. 1      C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{3}$
- 若  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  是其前  $n$  项的和, 且  $S_{11} = \frac{22}{3}\pi$ ,  $\{b_n\}$  为等比数列,  $b_5 \cdot b_7 = \frac{\pi^2}{4}$ , 则  $\tan(a_6 + b_6)$  的值为  
A.  $\sqrt{3}$       B.  $\pm\sqrt{3}$       C.  $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 以  $F$  为圆心,  $a$  为半径的圆与双曲线的一条渐近线的两个交点为  $A, B$ . 若  $\angle AFB = 60^\circ$ , 则该双曲线的离心率为  
A.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$       D.  $\frac{4}{3}$
- 函数  $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{2}) (\omega > 0)$  在  $[0, \frac{\pi}{5}]$  上单调递增, 则  $\omega$  的最大值为  
A. 6      B. 5      C. 4      D. 1
- 设函数  $f'(x)$  是奇函数  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  的导函数,  $f(-1) = 0$ , 当  $x > 0$  时,  $xf'(x) - f(x) < 0$ , 则不等式  $f(x) < 0$  的解集为  
A.  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$       B.  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$   
C.  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$       D.  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

数学试题(附中版) 第 1 页(共 8 页)

学 号  
姓 名  
校 址  
班 级  
密 封 线 内 不 准 答 题

8.  $\triangle ABC$  中,  $D$  为  $AC$  上一点且满足  $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{DC}$ , 若  $P$  为  $BD$  上一点, 且满足  $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$ ,  $\lambda, \mu$  为正实数, 则下列结论正确的是

- A.  $\lambda\mu$  的最小值为  $\frac{1}{16}$                       B.  $\lambda\mu$  的最大值为 1  
C.  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\mu}$  的最小值为 4                  D.  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\mu}$  的最大值为 16

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知  $i$  为虚数单位, 下列说法正确的是

- A. 若复数  $z = \frac{1+i}{1-i}$ , 则  $z^{20} = -1$   
B. 若复数  $z$  满足  $|z-1| = |z-i|$ , 则复平面内  $z$  对应的点  $Z$  在一条直线上  
C. 若  $(x^2-1) + (x^2+3x+2)i$  是纯虚数, 则实数  $x = \pm 1$   
D. 复数  $z = 2-i$  的虚部为  $-i$

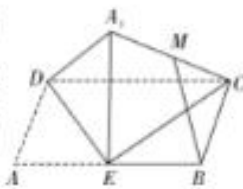
10. 已知过点  $A(a, 0)$  作曲线  $C: y = \frac{x}{e^x}$  的切线有且仅有两条, 则实数  $a$  的值可以是

- A. -2                      B. 4                      C. 6                      D. 0

11. 已知  $F$  是抛物线  $C: y^2 = x$  的焦点,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  是  $C$  上的两点,  $O$  为原点, 则

- A. 若  $BB'$  垂直  $C$  的准线于点  $B'$ , 且  $|BB'| = 2|OF|$ , 则四边形  $OFBB'$  的周长为  $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$   
B. 若  $|AF| = \frac{5}{4}$ , 则  $\triangle AOF$  的面积为  $\frac{1}{8}$   
C. 若直线  $AB$  过点  $F$ , 则  $2x_1 + x_2$  的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
D. 若  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{1}{4}$ , 则直线  $AB$  恒过定点  $(\frac{1}{2}, 0)$

12. 如图, 矩形  $ABCD$  中,  $AB=4, BC=2, E$  为边  $AB$  的中点, 沿  $DE$  将  $\triangle ADE$  折起, 点  $A$  折至  $A_1$  处 ( $A_1 \notin$  平面  $ABCD$ ),  $P, Q$  分别在线段  $CE$  和侧面  $A_1DE$  上运动, 且  $PQ=2$ , 若  $M, N$  分别为线段  $A_1C, PQ$  的中点, 则在  $\triangle ADE$  折起过程中, 下列说法正确的是



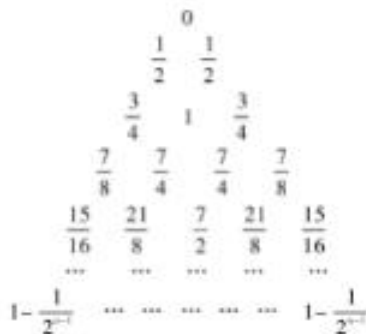
- A.  $\triangle A_1EC$  面积的最大值为  $2\sqrt{2}$   
 B. 存在某个位置, 使得  $BM \perp A_1D$   
 C. 三棱锥  $A_1-EDC$  体积最大时, 三棱锥  $A_1-EDC$  的外接球的表面积为  $16\pi$   
 D. 三棱锥  $A_1-EDC$  体积最大时, 点  $N$  到平面  $A_1DC$  的距离的最小值为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}-1$ .

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $\triangle ABC$  的顶点  $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$ , 则  $AC$  边上的高  $BD$  的长等于\_\_\_\_\_.
14. 已知函数  $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R})$ . 若  $f(x_0) = \frac{3\sqrt{2}}{10}, x_0 \in [\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$ , 则  $\cos 2x_0 =$ \_\_\_\_\_.
15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x > -1) \\ e^x & (x \leq -1) \end{cases}$ , 若  $a < b, f(a) = f(b)$ , 则实数  $a-2b$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
16. 在如图所示的三角形数阵中, 用  $a_{i,j} (i \geq j)$  表示第  $i$  行第  $j$  个数 ( $i, j \in \mathbf{N}^+$ ), 已知  $a_{i,1} = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} (i \in \mathbf{N}^+)$ , 且当  $i \geq 3$  时, 除第  $i$  行中的第 1 个数和第  $i$  个数外, 每行中的其他各数均等于其“肩膀”上的两个数之和, 即  $a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j} (2 \leq j \leq i-1)$ . 若  $a_{m,2} > 2023$ , 则正整数  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_.



数学试题(附中版) 第 3 页(共 8 页)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_n > 0$ ,  $a_{n+1} \cdot (S_{n+1} + S_n) = 2$ .

(1) 求  $S_n$ ;

(2) 求  $\frac{1}{S_1+S_2} + \frac{1}{S_2+S_3} + \dots + \frac{1}{S_n+S_{n+1}}$ .

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ ,  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4\cos C$ .

(1)求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的值;

(2)若 $\frac{1}{\tan B} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C}$ ,求 $\cos A$ .

19. (本小题满分 12 分)

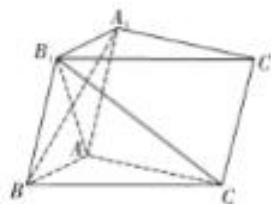
新能源汽车的发展有着诸多的作用,不仅能够帮助国家减少对石油的依赖,同时还能够减轻环境的污染. 为了加强环保建设,提高社会效益和经济效益,某市计划用若干时间更换一万辆燃油型公交车,每更换一辆新车,则淘汰一辆旧车,替换车为电力型和混合动力型车. 今年初投入了电力型公交车 128 辆,混合动力型公交车 400 辆;计划以后电力型车每年的投入量比上一年增加 50%,混合动力型车每年比上一年多投入  $a$  辆.

(1) 求经过  $n$  年,该市被更换的公交车总数  $S(n)$ ;

(2) 若该市计划 7 年内完成全部更换,求  $a$  的最小值.

20. (本小题满分 12 分)

在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 四边形  $AA_1B_1B$  是菱形,  $AB \perp AC$ , 平面  $AA_1B_1B \perp$  平面  $ABC$ , 平面  $A_1B_1C_1$  与平面  $AB_1C$  的交线为  $l$ .



(1) 证明:  $A_1B \perp B_1C$ ;

(2) 已知  $\angle ABB_1 = 60^\circ$ ,  $AB = AC = 2$ .  $l$  上是否存在点  $P$ , 使  $A_1B$  与平面  $ABP$  所成角为  $30^\circ$ ? 若存在, 求  $B_1P$  的长度; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  离心率  $e$

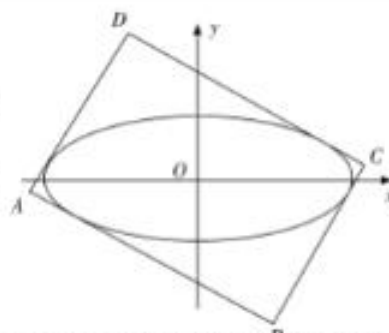
$= \frac{1}{2}$ , 椭圆上的点到左焦点  $F_1$  的距离

的最大值为 3.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 求椭圆  $C$  的外切矩形 (即矩形的四边所在的直线均与椭圆相切)

$ABCD$  的面积  $S$  的取值范围.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x - a \ln x (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 当  $a < e$  时, 讨论函数  $f(x)$  零点的个数;

(2) 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) \geq ax^e \ln x - xe^x$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw