高三数学考试参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $A=\{x|-2<x<6\}$, $B=\{x|x<1\}$,则 $A\cap B=\{x|-2<x<1\}$.

2. D 【解析】本题考查复数,考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $z^2=a^2-1+2ai=3+4i$,则 $\begin{cases}a^2-1=3,\\2a=4,\end{cases}$ 解得 $a=2$,从而 $z=2-i$,故复数 z 在复平面内对应的点位于第四象限.

3. B 【解析】本题考查函数的图象,考查数学抽象的核心素养.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $f(x)>0$,则排除 A,D;当 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 时, $f(x)<0$,则排除 C. 故选 B.

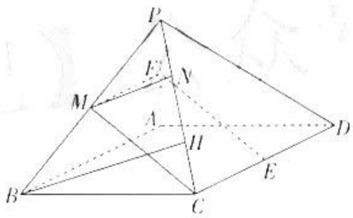
4. A 【解析】本题考查充要条件与三角恒等变换,考查函数与方程的思想.

由 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$,得 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\sin[2(\alpha-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2}]=\cos 2(\alpha-\frac{\pi}{3})=1-2\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$,由 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$,得 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,则" $\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$ "是" $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$ "的充分不必要条件.

5. C 【解析】本题考查统计图表,考查数据分析的核心素养.

由题中统计图可知参加这次会议的总人数为 $40\div40\%=100$,则所发矿泉水喝剩约一半的人数为 $100\times30\%=30$,故会议所发矿泉水全部喝完的人数为 $100-40-30-8=22$.

6. A 【解析】本题考查异面直线所成角,考查直观想象的核心素养.



如图,分别取 PB, PH 的中点 M, N,连接 MF, CM, MN. 易证四边形 $CEFM$ 是平行四边形,则 $CM/\!/EF$, $CM=EF$. 因为 M, N 分别是 PB, PH 的中点,所以 $MN/\!/BH$,则 $\angle CMN$ 是异面直线 BH 与 EF 所成的角(或补角). 设 $AB=6$,则 $CM=EF=3\sqrt{6}$, $PM=\frac{1}{2}PB=3\sqrt{2}$, $CN=2PN=4\sqrt{3}$, $MN=\sqrt{PM^2+PN^2-2PM\cdot PN\cos\angle MPN}=\sqrt{6}$,故 $\cos\angle CMN=\frac{6+54-48}{2\times3\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$.

7. B 【解析】本题考查指数、对数的运算,考查数学建模的核心素养.

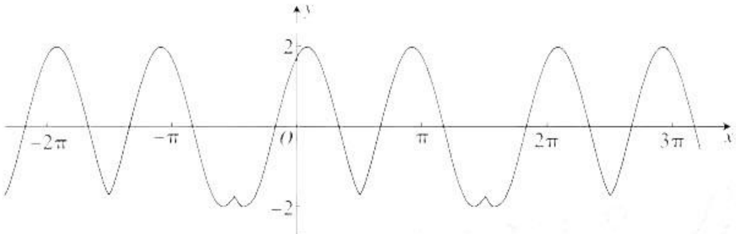
设原来的光线强度为 $a(a>0)$,则要想通过 n 块这样的玻璃之后的光线强度 $a\times(90\%)^n<\frac{1}{25}a$,即 $0.9^n<\frac{1}{25}$,即 $\lg 0.9^n<\lg\frac{1}{25}$,即 $n>\frac{-2\lg 5}{2\lg 3-1}=\frac{-2(1-\lg 2)}{2\lg 3-1}=\frac{-2+2\times0.3}{2\times0.477-1}\approx30.4$,故至少要通过 31 块这样的玻璃,才能使光线强度减弱到原来的 $\frac{1}{25}$ 以下.

8. D 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查数形结合的数学思想.

$f(x)=2\sin x|\cos x|+\sqrt{3}\cos 2x=\begin{cases}2\sin(2x+\frac{\pi}{3}),2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},\\-2\sin(2x-\frac{\pi}{3}),2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的图象,如图所示,

由 $f(x)$ 的图象可知 $f(x)$ 的最小正周期为 2π,则 A 错误. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 对称,则 B 错误. $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 6 个极值点,则 C 错误. 当 $x\in[\frac{13\pi}{6},\frac{5\pi}{2}]$ 时, $\cos x>0$,则 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. 令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$,解得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{12}(k\in Z)$. 因为 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in$

Z)，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$. 当 $k=1$ 时，$\frac{25\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}$. 因为 $[\frac{13\pi}{6},\frac{5\pi}{2}]\subsetneqq[\frac{25\pi}{12},\frac{5\pi}{2}]$，所以 $f(x)$ 在 $[\frac{13\pi}{6},\frac{5\pi}{2}]$ 上单调递减，则 D 正确.



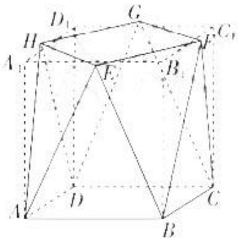
9. ABC 【解析】本题考查平面向量，考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,-4)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,-6)$，则 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AD}$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt5$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，故 A，B，C 正确，D 错误.

10. ACD 【解析】本题考查不等式，考查逻辑推理的核心素养.

因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，所以 $2\sqrt{2ab}\leqslant1$，即 $ab\leqslant\frac{1}{8}$，则 A 正确；当 $a=\frac12$，$b=\frac14$ 时，$2a+b=\frac54>\frac12$，则 B 错误；$\frac1a+\frac2b=(a+2b)(\frac1a+\frac2b)=\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}+5\geqslant9$，当且仅当 $a=b=\frac13$ 时，等号成立，则 C 正确；因为 $a>b>0$，且 $a+2b=1$，所以 $0<a<1$，$0<b<1$，所以 $\log_a b>0$，则 D 正确.

11. ABD 【解析】本题考查多面体外接球，考查直观想象的核心素养.



如图，补全长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$. 由题中数据可知 $A_1E^2=1+(\sqrt2-1)^2=4-2\sqrt2$，则 $AA_1=\sqrt{7-(4-2\sqrt2)}=\sqrt2+1$，故 A 正确. 因为 $AB=2$，$AE=\sqrt7$，所以 $\triangle ABE$ 的面积 $S_1=\frac12\times2\times\sqrt{7-1}=\sqrt6$，则十面体 $ABCD-EFGH$ 的表面积 $S=8\sqrt6+8$，故 B 正确. 因为十面体 $ABCD-EFGH$ 由长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面绕着其中心旋转 45°得到，所以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球就是十面体 $ABCD-EFGH$ 的外接球. 设十面体 $ABCD-EFGH$ 外接球的半径为 R，则 $R^2=\frac{11+2\sqrt2}{4}$，则十面体 $ABCD-EFGH$ 外接球的表面积是 $4\pi R^2=(11+2\sqrt2)\pi$，故 D 正确. 因为 $AE=BE=\sqrt7$，$AB=2$，所以 $\sin\angle BAE=\frac{\sqrt{7-1}}{\sqrt7}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，所以 $r^2=(\frac{BE}{2\sin\angle BAE})^2=\frac{49}{24}$，则十面体 $ABCD-EFGH$ 外接球球心到平面 ABE 的距离是 $\sqrt{\frac{11+2\sqrt2}{4}-\frac{49}{24}}=\sqrt{\frac{17+12\sqrt2}{24}}=\sqrt{\frac{(3+2\sqrt2)^2}{24}}=\frac{3\sqrt6+4\sqrt3}{12}$，故 C 错误.

12. ABD 【解析】本题考查函数的基本性质，考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(3)=-3$，且 $g(x)+f(x+2)=3$，所以 $g(1)+f(3)=3$，所以 $g(1)=6$，则 A 正确. 因为 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(x+2)=f(-x)$. 因为 $f(x)-g(2-x)=-5$，所以 $f(2-x)-g(2-x)=-5$，所以 $f(-x)-g(-x)=-5$. 因为 $g(x)+f(x+2)=3$，所以 $g(x)+f(-x)=3$，所以 $g(x)+g(-x)=8$，则 $g(x)$ 的图象关于 $(0,4)$ 对称，且 $g(0)=4$，故 B 正确. 因为 $f(x)-g(2-x)=-5$，所以 $f(-x)-g(x+2)=-5$，所以 $g(x)+g(x+2)=8$，所以 $g(x+2)+g(x+4)=8$，则 $g(x)=g(x+4)$，即 $g(x)$ 的周期为 4，故 C 错误. 因为 $f(3)=-3$，且 $g(x)+f(x+2)=3$，所以 $g(1)=6$. 因为 $g(x)+g(x+2)=8$，所以 $g(3)=2$. 因为 $g(0)=4$，所以 $g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22}g(k)=5[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)]+g(1)+g(2)=5\times16+10=90$，故 D 正确.

13. 4 【解析】本题考查抛物线的性质，考查数学运算的核心素养.

由题意可得$\frac{p}{2}=2$，解得$p=4$.

14. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$（答案不唯一） 【解析】本题考查双曲线，考查数学运算的核心素养.

满足$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$即可.

15. $\frac{6}{25}$ 【解析】本题考查概率，考查分类讨论的数学思想.

甲、乙等五人参加跳高、跳远、50米短跑这三个项目的情况有$(\frac{C_5^2C_3^2}{2}+C_5^3)\cdot A_3^3=150$种，其中符合条件的情况有$(C_5^2-C_4^1)A_3^3=36$种，故所求概率$P=\frac{36}{150}=\frac{6}{25}$.

16. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ 【解析】本题考查导数的运用，考查化归与转化的数学思想.

设$g(x)=x^2f(x)$，则$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$. 当$x>0$时，因为$xf'(x)+2f(x)>0$，所以$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 因为$f(x)$是奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$，所以$g(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-g(x)$，则$g(x)$是奇函数. $x^3f(x)>0$，即$xg(x)>0$. 因为$f(2)=0$，所以$g(-2)=-g(2)=0$，

则$xg(x)>0$等价于$\begin{cases}x>0,\\g(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\g(x)<0,\end{cases}$解得$x<-2$或$x>2$.

17. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d，

由题意可得$\begin{cases}a_1+2d=10,\\(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+6d),\end{cases}$即$\begin{cases}a_1+2d=10,\\3d^2-3a_1d=0,\end{cases}$

因为$d\neq0$，所以$a_1=6$，$d=2$. ………………………………………… 3分

则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2+5n$. ………………………………………… 5分

(2)由(1)可知$b_n=\frac{2}{S_n+6}=\frac{2}{n^2+5n+6}=2(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})$，………………………… 7分

则$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=2[(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\cdots+(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})]$，

故$T_n=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3})=\frac{2n}{3n+9}$. ………………………………………… 10分

评分细则：

(1)第一问中，也可以将a_2，a_4，a_7用a_1和d表示，从而求出d，再根据前n项和公式求出S_n；

(2)第二问中求出$T_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{n+3}$不扣分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

18. 解：(1)由题意可知某顾客抽奖一次，积分为3分的频率是$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$，则估计某顾客抽奖一次，积分为3分的概率为$\frac{1}{5}$. ………………………………………… 2分

某顾客抽奖一次，积分为2分的频率是$\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$，则估计某顾客抽奖一次，积分为2分的概率为$\frac{3}{10}$. …… 4分

(2)由题意可知X的可能取值为4，5，6，7，8. ………………………………………… 5分

$P(X=8)=\frac{C_{15}^2}{C_{30}^2}=\frac{7}{29}$，………………………………………… 6分

$P(X=7)=2\times\frac{C_{15}^1C_9^1}{C_{30}^2}=\frac{9}{29}$，………………………………………… 7分

$P(X=6)=\frac{C_9^2+C_{15}^1C_6^1}{C_{30}^2}=\frac{42}{145}$，………………………………………… 8分

$P(X=5)=\dfrac{C_6^1C_9^1}{C_{30}^2}=\dfrac{18}{145}$, ………………………………………………………… 9 分

$P(X=4)=\dfrac{C_6^2}{C_{30}^2}=\dfrac{1}{29}$. ………………………………………………………… 10 分

则 X 的分布列为

X	8	7	6	5	4
P	$\frac{7}{29}$	$\frac{9}{29}$	$\frac{12}{145}$	$\frac{18}{145}$	$\frac{1}{29}$

故 $E(X)=8\times\dfrac{7}{29}+7\times\dfrac{9}{29}+6\times\dfrac{12}{145}+5\times\dfrac{18}{145}+4\times\dfrac{1}{29}=6.6$. ………………………………… 12 分

评分细则：

(1)第一问中，直接求出概率，不予扣分；

(2)第二问中，得到随机变量 X 的所有取值得 1 分，每求出一个 X 取值的概率得 1 分，只求出 $P(X_i)(i=4,5,6,7,8)$的值，没有列出表格，不予扣分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

19. 解：(1)因为 $\cos A+\cos\dfrac{A}{2}=0$，所以 $2\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}-1=0$， ……………………………… 1 分

即 $(2\cos\dfrac{A}{2}-1)(\cos\dfrac{A}{2}+1)=0$，解得 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\dfrac{A}{2}=-1$(舍去). ……………………………… 3 分

因为 $\dfrac{A}{2}\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，则 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ ……………………………………………………… 5 分

(2)设 $DB=x$，$EC=y$，则 $c=3x$，$b=5y$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $a^2=(3x)^2+(5y)^2-2\cdot 3x\cdot 5y\cdot\cos A$，

即 $9x^2+25y^2+15xy=49$，① ……………………………………………………… 6 分

在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理可得 $DE^2=(2x)^2+(4y)^2-2\cdot 2x\cdot 4y\cdot\cos A$，

即 $x^2+4y^2+2xy=7$，② ……………………………………………………… 7 分

联立①②，解得 $x=1$，$y=1$， ……………………………………………………… 9 分

则 $c=3$，$b=5$. ……………………………………………………… 10 分

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)第一问中，求出 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，得 3 分，没有说明 $\dfrac{A}{2}\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，直接得到 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，不予扣分；

(2)第二问中求出 b，c 的值得 4 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

20. (1)证明：由正三棱柱的性质，易证 $\triangle BCE\cong\triangle CC_1D$，则 $\angle BCE=\angle CC_1D$.

因为 $\angle CC_1D+\angle C_1DC=90^\circ$，所以 $\angle BCE+\angle C_1DC=90^\circ$，即 $CE\perp C_1D$. ……………………………… 1 分

因为 $AB=AC$，D 是棱 BC 的中点，所以 $AD\perp BC$.

由正三棱柱的定义可知 $CC_1\perp$ 平面 ABC，则 $CC_1\perp AD$. ……………………………………… 2 分

因为 BC，$CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，且 $BC\cap CC_1=C$，所以 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1. ……………………………… 3 分

因为 $CE\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AD\perp CE$. ……………………………………………………… 4 分

因为 AD，$C_1D\subset$ 平面 AC_1D，且 $AD\cap C_1D=D$，所以 $CE\perp$ 平面 AC_1D. ……………………………… 5 分

因为 $CE\subset$ 平面 A_1CE，所以平面 $AC_1D\perp$ 平面 A_1CE. ……………………………………… 6 分

(2)解：取 B_1C_1 的中点 F，连接 DF. 易证 DA，DC，DF 两两垂直，故以 D 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DF}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线