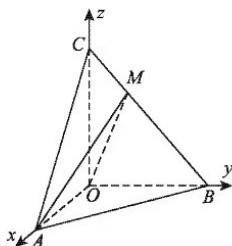


2024 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣高二联考答案
数学(北师大版)

1.D 【解析】因为 $k = \frac{\sin 2}{\cos 2} = \tan 2, 2 \in [0, \pi)$, 故 $\alpha = 2$.
故选 D.

2.B 【解析】易知①, ②, ③, ④号用电器出或不出故障的情况共有 $2^4 = 16$ 种, 在串联起来的两个并联电路中, 每一个并联电路连通的不同种数有 3 种, 则整个电路处于连通状态共有 $3 \times 3 = 9$ 种情况, 则用电器出现故障的不同种数为 $16 - 9 = 7$ 种.
故选 B.

3.A 【解析】根据题意, 以 O 为原点, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 方向分别作为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图,



则 $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 4), M(0, 1, \frac{8}{3})$,

设平面 OMA 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OM} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x = 0, \\ y + \frac{8}{3}z = 0, \end{cases}$$

取 $z = 3$, 则 $\mathbf{m} = (0, -8, 3)$, 点 B 到平面 OMA 的距

$$离 d = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{24}{\sqrt{73}} = \frac{24\sqrt{73}}{73}.$$

故选 A.

4.A 【解析】由题意易知直线 l 的斜率一定存在, 斜率设为 k , 则直线 l 的方程为 $y - 3 = k(x - 1)$, 分别与 $y = x, y = -x$ 联立可得 A, B 两点的横坐标: $x_A = \frac{3-k}{1-k}, x_B = \frac{k-3}{k+1}$, 故 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} |x_A| \cdot$

$$\sqrt{2} |x_B| = |x_A x_B| = \left| \frac{k-3}{k+1} \cdot \frac{3-k}{1-k} \right|, A, B \text{ 两点都在 } x \text{ 轴的上方, 故 } -1 < k < 1,$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{3-k}{k+1} \cdot \frac{3-k}{1-k} = \left[1 + \frac{2(1-k)}{k+1} \right] \cdot \left[2 + \frac{1+k}{1-k} \right] = 2 + 2 + \frac{4(1-k)}{k+1} + \frac{1+k}{1-k} \geq 8, \text{ 当且仅当}$$

• 数学(北师大版)答案(第1页,共5页) •

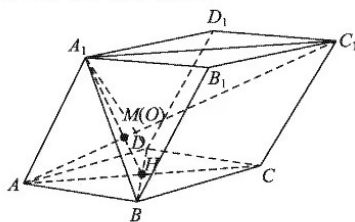
$\frac{4(1-k)}{k+1} = \frac{1+k}{1-k}$, 即 $k = \frac{1}{3}$ 时等号成立, 故 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 8. 故选 A.

5.C 【解析】根据题意得, 不同分组种数为 $\frac{C_6^2 C_3^1 C_4^1 C_2^1}{A_3^3} = 90$. 故选 C.

6.B 【解析】根据题意可设二次函数为 $y = at^2 + bt + c$,
 $c(a \neq 0)$, 则 $\begin{cases} 240 = 25a + 5b + c, \\ 330 = 100a + 10b + c, \\ 320 = 225a + 15b + c, \end{cases}$
解得 $\begin{cases} a = -2, \\ b = 48, \\ c = 50, \end{cases}$ 则该函数解析式为 $y = -2t^2 + 48t + 50$,

函数图象为开口向下的抛物线, 当 $t = -\frac{b}{2a} = 12$ 时, y 取得最大值, 故当降价额度为 12 时, 得到最大利润. 故选 B.

7.D 【解析】根据题意, 连接 AC, BD 交于点 H , 连接 A_1H 与 AC_1 交于点 O , 如图,



在平行六面体中, $\triangle OAH \sim \triangle OC_1A_1$, 则 $AO = \frac{1}{2}OC_1$, 根据平面的基本性质易知点 M 与点 O 重合, 故 $\overrightarrow{C_1M} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1M}^2 = \frac{4}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \frac{4}{9}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{4}{9}(4 \times 3 + 4 \times 3) = \frac{32}{3}$, $|\overrightarrow{C_1M}| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

8.C 【解析】根据题意设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), C\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right)$, 则 $k_{AB} + k_{AC} = 0$, 即 $\frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} + \frac{y_1 - y_3}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_3^2}{4}} = 0$, 则 $\frac{4}{y_1 + y_2} + \frac{4}{y_1 + y_3} = 0$, 化简得 $2y_1 + y_2 + y_3 = 0$,

$$k_{BC} = \frac{y_2 - y_3}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_3^2}{4}} = \frac{4}{y_2 + y_3} = -\frac{4}{2y_1} = -\frac{2}{y_1},$$

$$\text{故 } k_{AB} = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{y_1}{2} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} - 1}, \text{ 解得 } y_1^2 = 12, k_{AC} =$$

$$-k_{AB} = -\frac{y_1}{2}, \text{ 则直线 AC 方程为 } y - y_1 = -\frac{y_1}{2} \left(x - \frac{y_1^2}{4} \right), \text{ 令 } y = 0 \text{ 得 } m = 2 + \frac{y_1^2}{4} = 5. \text{ 故选 C.}$$

9. AC 【解析】对于 A: 点 M 在 $\odot O$ 内, 故 $x_0^2 + y_0^2 < 1$, A 正确;

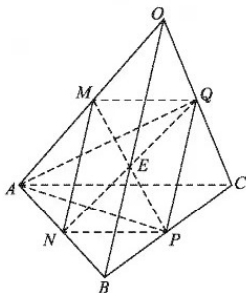
对于 B: 点 O 到直线 $x_0x + y_0y = 1$ 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > 1$, 故直线与圆相离, B 错误;

对于 C: 弦与 OM 垂直时, 过 $M(x_0, y_0)$ 的弦长最小为 $2\sqrt{1 - |OM|^2} = 2\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$, C 正确;

对于 D: $\odot O'$ 的圆心为 $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$, 半径为 $\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2}$, $|OO'| = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2} \neq 1 - \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2}$, 故 D 错误.

故选 AC.

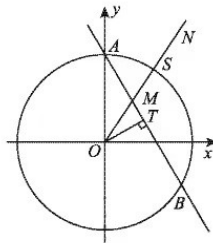
10. ABC 【解析】对于 A: $\vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0$ 可化为 $\vec{OA} \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = 0$, $\vec{OB} \cdot \vec{AC} = 0$ 可化为 $\vec{OB} \cdot (\vec{OC} - \vec{OA}) = 0$, 两式相减得 $\vec{OA} \cdot \vec{OC} - \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$, 即 $\vec{OC} \cdot \vec{BA} = 0$, 故 A 正确; 对于 B: 连接 MN, NP, PQ, QM, 如图,



易证 $MN \parallel OB \parallel PQ$, 且 $MN = \frac{1}{2}OB = PQ$, 故 $\vec{MN} = \vec{QP}$, 则四边形 MNPQ 为平行四边形, 故 B 正确; 对于 C: 由 $|\vec{OB}| = |\vec{AC}|$ 可知, 平行四边形 MNPQ 为菱形, 故 $\vec{MP} \cdot \vec{NQ} = 0$, 故 C 正确; 对于 D: $\vec{AM} - \vec{AP} = \vec{PM}$, $\vec{AN} - \vec{AQ} = \vec{QN}$, 两向量不共线, $\vec{PM} \neq \vec{QN}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

11. ACD 【解析】当 $AB \perp OM$ 时, $|OM| = 5$, $|OA| = 10$, $\frac{1}{2}|AB| = \sqrt{|OA|^2 - |OM|^2} = 5\sqrt{3}$, $|AB|$ 取得最小值为 $10\sqrt{3}$, 故 A 正确; 圆心

O 到直线 AB 的距离的最大值为 $|OM| = 5$, B 错误; 点 T 在以 OM 为直径的圆上, 故 C 正确; 设射线 OM 交 $\odot O$ 于点 S, 如图,

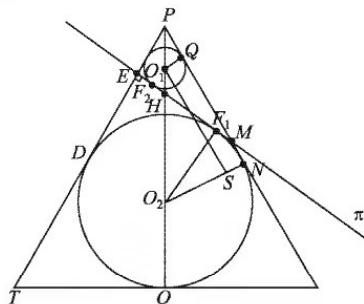


若存在点 N, 则 $|MS| = \frac{1}{2}|SN|$, 则 $|OM| = \frac{1}{4}|ON|$, 即 N 点坐标为 (12, 16),

验证: 设 $Q(x, y)$, 则 $\frac{|QN|^2}{|QM|^2} = \frac{(x-12)^2 + (y-16)^2}{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 24x - 32y + 400}{x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25}$, 而 $x^2 + y^2 = 100$, 故原式 $= \frac{-24x - 32y + 500}{-6x - 8y + 125} = 4$, 则 $\frac{|QN|}{|QM|} = 2$, 故 D 正确.

故选 ACD.

12. ABCD 【解析】设两球与平面 π 的切点分别为 F_1, F_2 , 如图,



因为 $|MF_1| = |MN|$, $|MF_2| = |MQ|$, 故 $|NQ| = |MN| + |MQ| = |MF_1| + |MF_2|$, 而 $|NQ|$ 为定值, 根据三角形性质易知, $|NQ| > |F_1F_2|$, 故 A, B 正确;

设小球、大球球心分别为 O_1, O_2 , 作 $O_1S \perp O_2N$ 于点 S, 易求得 $|O_1S| = |QN| = 2a$, 故 $|O_1O_2| = \frac{4a}{\sqrt{3}}$, 而 $|F_2H| = \frac{1}{2}|O_1H|$, $|F_1H| = \frac{1}{2}|O_2H|$, 故 $2c = |F_2H| + |F_1H| = \frac{1}{2}|O_1O_2| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, 故

$e = \frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 正确;

不妨设圆锥母线长为 2, 设小球半径为 r , 大球半径

为 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

则 $|PD| = |PN| = 1$, 故 $|PE| + |EM| + |MP| = (|PE| + |EF_1|) + (|F_1M| + |MP|) = |PD| + |PN| = 2$,

即 $|PE| + \sqrt{3}|PE| + 2|PE| = 2$, 解得 $|PE| = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, 故 $2r = |PE| + \sqrt{3}|PE| - 2|PE| =$

$(\sqrt{3}-1) \times \frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}-6}{3}$,

故 $r = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$, 则 $\frac{r}{R} = 2-\sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选 ABCD.

- 13.270 【解析】根据题意, 令 $x=1$, 得 $(3+1)^n = 1024$, 解得 $n=5$, 展开式中 x^2 项的系数为 $C_5^2 \cdot 3^3 = 270$.

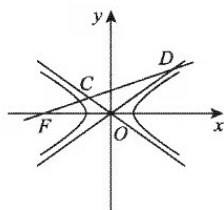
14. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ 【解析】根据题意, 过焦点的直线方程可设为

$y = k(x+2)$, $y = k(x+2)$ 与 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 联立得,

$x_C = \frac{-6k}{3k+\sqrt{3}}$,

$y = k(x+2)$ 与 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 联立得, $x_D = \frac{6k}{\sqrt{3}-3k}$,

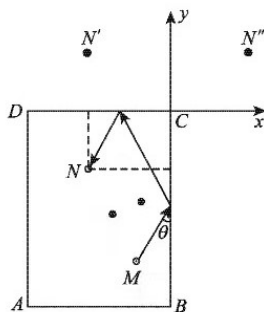
如图,



$|OD| = 2|OC|$, $\frac{6k}{\sqrt{3}-3k} = 2 \cdot \frac{6k}{3k+\sqrt{3}}$, 解得

$k = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

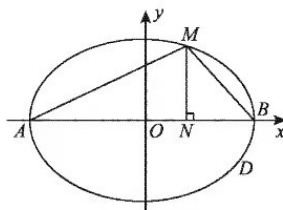
15. $\frac{9}{14}$ 【解析】以 C 为原点, DC, BC 边分别为 x 轴, y 轴建立平面直角坐标系, 如图,



则 $N(-120, -80)$, $M(-60, -200)$, N 关于 x 轴的对称点为 $N'(-120, 80)$, N' 关于 y 轴的对称点为 $N''(120, 80)$, 直线 MN'' 方向为本球射出方向, 故

$\tan \theta = \frac{9}{14}$.

16. $\frac{2\sqrt{22}}{11}$ 【解析】设 $MN \perp AB$ 于点 N, 如图,



$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} |AM| |BM| \sin 120^\circ = \frac{1}{2} |AB| \cdot$

$|MN|$, 得 $|MN| = \frac{\sqrt{3}}{4}a$,

设 $\angle MAB = \alpha$, $\angle MBA = \beta$, $|AN| = m$, $\frac{1}{\tan \alpha} =$

$\frac{|AN|}{|MN|} = \frac{4m}{\sqrt{3}a}$, $\frac{1}{\tan \beta} = \frac{|BN|}{|MN|} = \frac{4(2a-m)}{\sqrt{3}a}$,

则 $\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{8}{\sqrt{3}}$, 即 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{8}{\sqrt{3}} \tan \alpha \tan \beta$,

又 $\sqrt{3} = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} =$

$\frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$, 解得 $\tan \alpha \tan \beta = \frac{3}{11}$, 即 $k_{MA} \cdot k_{MB} =$

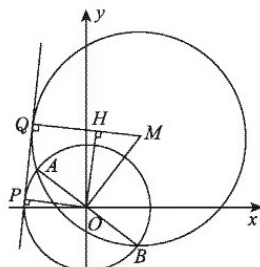
$\tan \alpha (-\tan \beta) = -\frac{3}{11}$,

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\frac{y_0}{x_0+a} \cdot \frac{y_0}{x_0-a} = -\frac{3}{11}$, 即 $\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2} =$

$-\frac{3}{11}$, 而 $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_0^2 = -\frac{b^2}{a^2} (x_0^2 - a^2)$, 则 $-\frac{b^2}{a^2} =$

$-\frac{3}{11}$, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{11}$, 则 $e = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

17. 解: (1) 作 $OH \perp MQ$ 于点 H, 如图,



易知 $|OH| = |PQ| = 2\sqrt{3}$, $|QH| = |PO| = 3$,

则 $|HM| = 5 - 3 = 2$, 根据勾股定理易得 $|OM| = 4$,

又 $|OA| = 3$, $|MA| = 5$, 则 $\angle AOM = 90^\circ$, 同理, $\angle BOM = 90^\circ$, 故直线 AB 过 O 点, $|AB| = 6$.

(2) 点 $(1, 1)$ 到直线 $ax + by + \sqrt{2} = 0$ 距离设为 d , 则

$$d = \frac{|a + b + \sqrt{2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

点 $M(a, b)$ 满足 $|OM| = 4$, 即 $a^2 + b^2 = 16$,

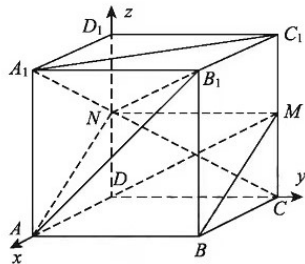
根据基本不等式得, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 32$,

则 $-4\sqrt{2} \leq a + b \leq 4\sqrt{2}$,

则 $|a + b + \sqrt{2}| \leq 5\sqrt{2}$,

则 $d \leq \frac{5\sqrt{2}}{4}$, 当且仅当 $a = b = 2\sqrt{2}$ 时, d 取最大值 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

18. 解: (1) 设 $AA_1 = m$, 以 D 为原点, 以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别作为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 如图,



则 $A(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $A_1(2, 0, m)$,

$M(0, 3, \frac{m}{2})$, $C_1(0, 3, m)$,

$\overrightarrow{A_1C} = (-2, 3, -m)$, $\overrightarrow{BM} = (-2, 0, \frac{m}{2})$,

$\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BM} = 4 - \frac{m^2}{2} = 0$, 解得 $m = 2\sqrt{2}$,

故 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{DM} = (0, 3, \sqrt{2})$,

$\cos \langle \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{DM} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{A_1C_1}| |\overrightarrow{DM}|} = \frac{9}{\sqrt{13} \times \sqrt{11}} =$

$$\frac{9\sqrt{143}}{143}.$$

则异面直线 A_1C_1 与 DM 所成角的余弦值为 $\frac{9\sqrt{143}}{143}$.

(2) 取 DD_1 中点为 $N(0, 0, \sqrt{2})$, 连接 AN, B_1N, MN , 易得 $MN \parallel AB$, 则四边形 $ABMN$ 为平行四边形, 则 $AN \parallel BM$, $AN \subset$ 平面 ANB_1 , $BM \not\subset$ 平面 ANB_1 , 则 $BM \parallel$ 平面 ANB_1 ,

设点 B 到平面 ANB_1 的距离为 d ,

则 $|PQ| \geq d$, 故 d 值即为 $|PQ|$ 的最小值.

设平面 ANB_1 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AN} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3y + 2\sqrt{2}z = 0, \\ -2x + \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

取 $z = \sqrt{2}$, 则 $n = (1, -\frac{4}{3}, \sqrt{2})$,

$$d = \frac{|n \cdot \overrightarrow{AB}|}{|n|} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{16}{9} + 2}} = \frac{12\sqrt{43}}{43},$$

则 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{12\sqrt{43}}{43}$.

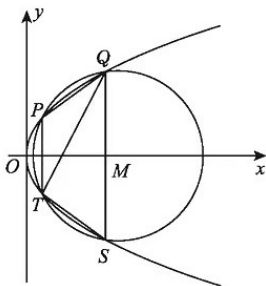
19. 解: (1) 设点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的方程为 $x = my + 4$, 由题意得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 则

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, 即 $\frac{y_1^2 y_2^2}{4p^2} + y_1y_2 = 0$, 化简得 $y_1y_2 + 4p^2 = 0$, 将 $x = my + 4$ 代入抛物线方程 $y^2 = 2px$ 可得,

$y^2 - 2pmy - 8p = 0$,

$y_1y_2 = -8p$, 则 $-8p + 4p^2 = 0$, 解得 $p = 2$, 抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 如图, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) (y_2 > y_1 > 0)$, 则 $T(x_1, -y_1), S(x_2, -y_2)$,



$$k_{TQ} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 + y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{4}{y_2 - y_1} = 2, \text{ 则 } y_2 - y_1 =$$

2, 即 $2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = 2$, 则 $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} = 1$ (*),

将 $y^2 = 4x$ 代入圆 M 的方程: $(x - 4)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$,

得 $x^2 - 4x + 16 - r^2 = 0$, 此方程有两个正根等价于

$$\begin{cases} \Delta = 16 - 4(16 - r^2) > 0, \\ x_1x_2 = 16 - r^2 > 0, \\ x_1 + x_2 = 4 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 2\sqrt{3} < r < 4,$$

将 $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = 16 - r^2$ 代入 (*) 式得 $4 -$

$$2\sqrt{16 - r^2} = 1, \text{ 解得 } r = \frac{\sqrt{55}}{2},$$

符合 $2\sqrt{3} < r < 4$, 故圆 M 的半径为 $\frac{\sqrt{55}}{2}$.

• 数学(北师大版)答案(第4页,共5页) •

20.解:(1)证明:在梯形 AA_1C_1C 中, $S_{\triangle AA_1C_1} = \frac{1}{2} \times$

$4 \times 2 = 4$, 因为 $AA_1 = AB = AC = \frac{1}{2} A_1C_1 = 2$, 所以

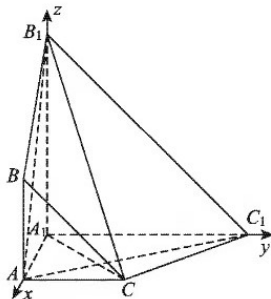
$A_1B_1 = 4$, 设点 B_1 到平面 ACC_1A_1 距离为 h ,

$V_{B_1-A_1CC_1} = \frac{1}{3} h \times 4 = \frac{16}{3}$, 解得 $h = 4 = A_1B_1$,

故 $A_1B_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 而 $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,
则 $A_1B_1 \perp CC_1$,

又 $AC = AA_1 = 2$, $\angle A_1AC = \angle AA_1C_1 = 90^\circ$, 易得
 $A_1C = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$, 又 $A_1C_1 = 4$, 则 $\angle A_1CC_1 =$
 90° , 又 $A_1B_1 \cap A_1C = A_1$, $A_1B_1, A_1C \subset$ 平面
 A_1B_1C , 则 $CC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C .

(2)由(1)知, A_1A, A_1C_1, A_1B_1 两两互相垂直,
以 A_1 为原点, $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B_1}$ 方向分别为 x 轴、
 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $A_1 -$
 xyz , 如图,



则 $C(2, 2, 0), B_1(0, 0, 4), C_1(0, 4, 0), A(2, 0, 0)$,
设平面 CB_1C_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0, \\ 4y_1 - 4z_1 = 0, \end{cases}$

取 $x_1 = 1$ 得, $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$,

设平面 B_1C_1A 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4y_2 - 4z_2 = 0, \\ -2x_2 + 4y_2 = 0, \end{cases}$

取 $y_2 = 1$, 则 $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$,

$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2+1+1}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

故二面角 $C-B_1C_1-A$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

21.解:(1)根据椭圆定义得, $2a = |PF_1| + |PF_2| =$
 $\sqrt{2^2 + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$,

$c = 1, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$, 故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} +$
 $y^2 = 1$.

(2)设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 方程: $y =$
 $kx + t$,

则由题意得 $\frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = 1$, 将 $y_1 = kx_1 + t$,

$y_2 = kx_2 + t$ 代入整理得:

$(2k-1)x_1x_2 + (t-1)(x_1+x_2) = 0$ (*),

将 $y = kx + t$ 代入椭圆方程整理得 $(1+2k^2)x^2 +$
 $4ktx + 2t^2 - 2 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2t^2-2}{1+2k^2}$,

代入(*)式得:

$(2k-1) \cdot \frac{2t^2-2}{1+2k^2} + (t-1) \cdot \frac{-4kt}{1+2k^2} = 0$,

整理得 $(t-1)(2k-t-1) = 0$,

当 $t-1=0$ 时, MN 过 B 点, 不合题意;

故 $2k-t-1=0$, 直线 MN 的方程为 $y = kx + 2k -$
 $1 = k(x+2) - 1$, 故 MN 过定点 $(-2, -1)$.

22.解:(1)该双曲线的实轴是 $y = x$, 实轴与渐近线的

夹角为 45° , 故 $\frac{b}{a} = 1$, 离心率 $e = \sqrt{2}$, $y = x$ 与 $y = \frac{1}{x}$
的一个交点坐标 $(1, 1)$ 与对称中心 $(0, 0)$ 的距离 $a =$
 $\sqrt{2}$, 故 $c = 2$, 故曲线 $xy = 1$ 焦点坐标为 $F_1(\sqrt{2},$
 $\sqrt{2}), F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(2)证明: 设 $M(x, y)$ 是曲线 $xy = 1$ 上任意一点, 要
证明 $xy = 1$ 是双曲线即证 $||MF_1| - |MF_2||$ 为
常数, 且此常数小于 $|F_1F_2| = 4$,

$|MF_2| = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} =$

$\sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{x}+\sqrt{2})^2} =$

$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{2}(x + \frac{1}{x}) + 4} =$

$\sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 + 2\sqrt{2}(x + \frac{1}{x}) + 2} =$

$|x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}|$, 同理, $|MF_1| = |x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}|$,

当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $|MF_1| - |MF_2| = -2\sqrt{2}$,

当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \leq -2$, $|MF_1| - |MF_2| =$
 $2\sqrt{2}$,

则 $||MF_1| - |MF_2|| = 2\sqrt{2} < 4$, 故 $xy = 1$ 为双
曲线.

• 数学(北师大版)答案(第5页,共5页) •

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线