北京市西城区 2018 — 2019 学年度第一学期期末

高三数学（理科）参考答案及评分标准

2019.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．B　　2．D　　3．C　　4．A

5．C　　6．A　　7．D　　8．C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$-1-\mathrm{i}$　　10．$-\dfrac{4}{3}$；$\dfrac{3}{5}$　　11．6

12．$[-1,+\infty)$　　13．答案不唯一，如 $f(x)=(x-1)^2$　　14．$(-2,0)$

注：第 10 题第一问 3 分，第二问 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，　………………… 2 分

得 $\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}$，即 $\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sin A\cos A}$，　………………… 4 分

解得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　………………… 6 分

（Ⅱ）由 $A\in(0,\pi)$，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　………………… 7 分

因为 $B=2A$，

所以 $\cos B=\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{3}$.　………………… 8 分

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.　………………… 9 分

又因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.　………………… 11 分

所以 $\cos B>\cos C$.

又因为函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，且 $B,C\in(0,\pi)$，

所以 $\angle B<\angle C$.

………………… 13 分

16.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB\perp$ 平面 BCM，$BC\subset$ 平面 BCM，

所以 $AB\perp BC$． ………………… 1 分

由正方形 B_1BCC_1，知 $BB_1\perp BC$，

又因为 $AB\cap BB_1=B$，

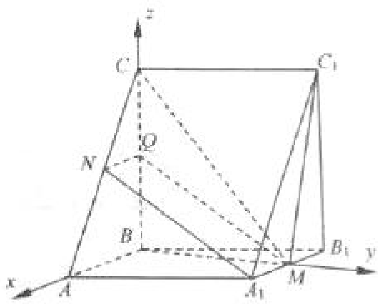
所以 $BC\perp$ 平面 A_1ABB_1， ………………… 3 分

又因为 $BC\subset$ 平面 B_1BCC_1，

所以平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 A_1ABB_1． ………………… 4 分

（Ⅱ）设 BC 中点 Q，连结 NQ，MQ．

因为 M，N 分别是 A_1B_1，AC 的中点，



所以 $NQ\,//\,AB$，且 $NQ=\dfrac{1}{2}AB$．

又因为 $AB\,//\,A_1B_1$，且 $AB=A_1B_1$，

所以 $NQ\,//\,A_1M$，且 $NQ=A_1M$．

所以四边形 A_1MQN 为平行四边形．

所以 $A_1N\,//\,MQ$． ………………… 6 分

又因为 $MQ\subset$ 平面 BCM，$A_1N\not\subset$ 平面 BCM，

所以 $A_1N\,//$ 平面 BCM． ………………… 8 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）可知 BA，BM，BC 两两互相垂直，因此以 B 为原点，以 BA，BM，BC 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $B-xyz$，如图所示． ………… 9 分

因为 A_1ABB_1 是边长为 2 的菱形，M 为 A_1B_1 的中点，且 $A_1B_1\perp BM$，

易得 $\angle BB_1A_1=60^\circ$，则 $B(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$M(0,\sqrt{3},0)$，$C(0,0,2)$，$A_1(1,\sqrt{3},0)$，

$B_1(-1,\sqrt{3},0)$，$C_1(-1,\sqrt{3},2)$，$N(1,0,1)$． ………………… 10 分

所以 $\overrightarrow{A_1N}=(0,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{MC_1}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CC_1}=(-1,\sqrt{3},0)$．

设平面 MCC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC_1}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x+2z=0, \\ -x+\sqrt{3}y=0. \end{cases}$

令 $y=2$，则 $x=2\sqrt{3}$，$z=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},2,\sqrt{3})$． ………………… 12 分

设直线 A_1N 与平面 MCC_1 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1N}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1N}|}\right|=\dfrac{\sqrt{57}}{38}$．

因此直线 A_1N 与平面 MCC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{57}}{38}$． ………………… 14 分

17．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $(a+0.020+0.022+0.028+0.042+0.080)\times5=1$，得 $a=0.008$， …………2 分

所以甲企业的样本中次品的频率为 $(a+0.020)\times5=0.14$，

故从甲企业生产的产品中任取一件，该产品是次品的概率约为0.14． ……… 4 分

（Ⅱ）由图表知，乙企业在 100 件样品中合格品有 96 件，

则一等品的概率为 $\dfrac{48}{96}=\dfrac{1}{2}$，二等品的概率为 $\dfrac{18+14}{96}=\dfrac{1}{3}$，三等品的概率为 $\dfrac{16}{96}=\dfrac{1}{6}$， ………………… 5 分

由题意，随机变量 X 的所有可能取值为：120，150，180，210，240． …… 6 分

且 $P(X=120)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$，$P(X=150)=C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$，

$P(X=180)=C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{18}$，$P(X=210)=C_2^1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，

$P(X=240)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$． ………………… 8 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	120	150	180	210	240
P	$\dfrac{1}{36}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{5}{18}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$

………………… 9 分

所以 $E(X)=120\times\dfrac{1}{36}+150\times\dfrac{1}{9}+180\times\dfrac{5}{18}+210\times\dfrac{1}{3}+240\times\dfrac{1}{4}=200$． ………10 分

（Ⅲ）答案不唯一，只要言之有理便可得分（下面给出几种参考答案）．

（1）以产品的合格率（非次品的占有率）为标准，对甲、乙两家企业的食品质量进行比较．

由图表可知，甲企业产品的合格率约为0.86，乙企业产品的合格率约为0.96，即乙企业产品的合格率高于甲企业产品的合格率，

所以可以认为乙企业的食品生产质量更高.

（2）以产品次品率为标准对甲、乙两家企业的食品质量进行比较（略）.

（3）以产品中一等品的概率为标准，对甲、乙两家企业的食品质量进行比较.

根据图表可知，甲企业产品中一等品的概率约为0.4，乙企业产品中一等品的概率约为0.48，即乙企业产品中一等品的概率高于甲企业产品中一等品的概率，

所以乙企业的食品生产质量更高.

（4）根据第（Ⅱ）问的定价，计算购买一件产品费用的数学期望，进而比较甲、乙两个企业产品的优劣（略）.

…………………… 13 分

18.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）求导，得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$， …………………… 1 分

因为曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，所以此切线的斜率为 0， …………………… 2 分

由 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.

又由曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，得 $f(1)=-1+a=0$.

解得 $a=1$. …………………… 4 分

（Ⅱ）由题意，得 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{\ln x-x+a}{x^2}$，

求导，得 $g'(x)=\dfrac{x-2\ln x+1-2a}{x^3}$， …………………… 5 分

因为 $x\in(1,\mathrm{e})$，所以 $g'(x)$ 与 $h(x)=x-2\ln x+1-2a$ 的正负号相同. …… 6 分

对 $h(x)$ 求导，得 $h'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$，

由 $h'(x)=0$，解得 $x=2$. …………………… 7 分

当 x 变化时，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(1,2)$	2	$(2,\mathrm{e})$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,\mathrm{e})$ 上单调递增.

又因为 $h(1)=2-2a$，$h(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1-2a$，

所以 $h(x)_{min}=h(2)=3-2\ln 2-2a$； $h(x)_{max}=h(1)=2-2a$． …………………… 9 分

如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增，则当 $x\in(1,e)$ 时，$g'(x)\geqslant 0$

所以 $h(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,e)$ 上恒成立，即 $h(x)_{min}=h(2)=3-2\ln 2-2a\geqslant 0$，

解得 $a\leqslant\dfrac{3}{2}-\ln 2$，且当 $a=\dfrac{3}{2}-\ln 2$ 时，$g'(x)=0$ 的解有有限个，

即当函数 $g(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增时，$a\leqslant\dfrac{3}{2}-\ln 2$； ① ………… 11 分

如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递减，则当 $x\in(1,e)$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，

所以 $h(x)\leqslant 0$ 在区间 $(1,e)$ 上恒成立，即 $h(x)_{max}=h(1)=2-2a\leqslant 0$，

解得 $a\geqslant 1$，且当 $a=1$ 时，$g'(x)=0$ 的解有有限个，

所以当函数 $g(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递减时，$a\geqslant 1$． ② ………… 12 分

因为函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上不是单调函数，

结合①②，可得 $\dfrac{3}{2}-\ln 2<a<1$，

所以实数 a 的取值范围是 $\dfrac{3}{2}-\ln 2<a<1$． …………………… 13 分

19．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，得 $c^2=a^2-2$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， …………………… 2 分

解得 $a=2$，$c=\sqrt{2}$，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$． …………………… 3 分

设 $P(0,m)$，由点 P 在椭圆 C 的内部，得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$，

又因为 $A(-2,0)$，

所以直线 AM 的斜率 $k_{AM}=\dfrac{m-0}{0+2}=\dfrac{m}{2}\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， …………………… 5 分

又因为 M 是椭圆 C 上异于 A,B 的一点，

所以 $k_{AM}\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$． …………………… 6 分

（Ⅱ）由题意 $F(\sqrt{2},0)$，设 $M(x_0,y_0)$，其中 $x_0\neq\pm 2$，则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$．

所以直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$， …………………… 7 分

令 $x=0$，得点 P 的坐标为 $(0,\dfrac{2y_0}{x_0+2})$． ………… 8分

因为 $k_{MP}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$，所以 $k_{AQ}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$．

所以直线 AQ 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x+2)$． …………10分

令 $x=0$，得点 Q 的坐标为 $(0,\dfrac{2y_0}{x_0-2})$．

由 $\overrightarrow{FP}=(-\sqrt{2},\dfrac{2y_0}{x_0+2})$，$\overrightarrow{FQ}=(-\sqrt{2},\dfrac{2y_0}{x_0-2})$， ………… 12分

得 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=2+\dfrac{4y_0^2}{x_0^2-4}=\dfrac{2x_0^2+4y_0^2-8}{x_0^2-4}=0$．

所以 $\overrightarrow{FP}\perp\overrightarrow{FQ}$，即 $\angle PFQ=90^\circ$．

所以 $\angle PFQ$ 为定值． ………… 14分

20．（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）数列 2, 4, 6, 8, 10 不是 4 阶平衡数列；

数列 1, 5, 9, 13, 17 是 4 阶平衡数列． ………… 3分

（Ⅱ）若 k 为偶数，设 $k=2m\,(m\in\mathbf{N}^*)$．

考虑 $1,2,3,\cdots,k$ 这 k 项，其和为 $S=\dfrac{k(k+1)}{2}$，

所以这 k 项的算术平均值为 $\dfrac{S}{k}=\dfrac{(k+1)}{2}=\dfrac{2m+1}{2}$，此数不是整数． ………… 5分

若 k 为奇数，设 $k=2m+1\,(m\in\mathbf{N}^*)$．

考虑 $1,2,3,\cdots,k-1,k+1$ 这 k 项，其和为 $S'=\dfrac{k(k+1)}{2}+1$．

所以这 k 项的算术平均值为 $\dfrac{S'}{k}=\dfrac{(k+1)}{2}+\dfrac{1}{k}=m+1+\dfrac{1}{2m+1}$，此数不是整数．

故数列 A: $1,2,3,\cdots,N$ 不是"k 阶平衡数列"，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$． ………… 8分

（Ⅲ）在数列 A 中任取两项 $a_s, a_t\,(s\neq t)$，对于任意 $k\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，在 A 中任取与 a_s, a_t 相

异的 $k-1$ 项，并设这 $k-1$ 项的和为 S_0

由题意，得 S_0+a_s，S_0+a_t 都是 k 的倍数，即 $S_0+a_s=pk$，$S_0+a_t=qk$ ($p,q\in\mathbf{Z}$)，

因此 $a_s-a_t=(p-q)k$，

即数列中任意两项的差 a_s-a_t 都是 k 的倍数，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N-1\}$.

因此所求数列 A 的任意两项之差都是 $2,3,\cdots,N-1$ 的公倍数. ……………… 9 分

如果数列 A 的项数超过 8，那么 $a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_8-a_7$ 均为 2, 3, 4, 5, 6, 7 的倍数，

即 $a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_8-a_7$ 均为420的倍数（注：420 为 2, 3, 4, 5, 6, 7 的最小公倍数），

所以 $a_8-a_1=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_8-a_7)>420\times7=2940$，

所以 $a_8>2940+a_1>2940$，这与 $a_N\leqslant2019$ 矛盾，

因此数列 A 至多有 7 项. ……………… 11 分

如果数列 A 的项数为 7，那么 $a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_7-a_6$ 均为 2, 3, 4, 5, 6 的倍数，

即 $a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_7-a_6$ 均为 60 的倍数（注：60 为 2, 3, 4, 5, 6 的最小公倍数），

又因为 $a_7\leqslant2019$，且 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_7$，

所以 $a_6\leqslant2019-60$，$a_5\leqslant2019-2\times60$，…，$a_1\leqslant2019-6\times60$，

所以 $a_1+a_6+\cdots+a_7\leqslant2019+(2019-60)+\cdots+(2019-6\times60)=12873$，

当且仅当 $a_i=2019-60(7-i)=1599+60i$（其中 $i=1,2,\cdots,7$）时，$a_1+a_6+\cdots+a_7$ 取到最大值 12873.

验证知此数列为"k 阶平衡数列"，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$.

如果数列 A 的项数小于或等于 6，由 $a_N\leqslant2019$，得数列 A 中所有项之和小于或等于 $2019\times6=12114$.

综上可得：数列 A 的所有元素之和的最大值为 12873. ……………… 13 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注