海南省 2022—2023 学年高二年级学业水平诊断(二)

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. D　　2. B　　3. A　　4. D　　5. A　　6. C　　7. B　　8. D

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. BC　　10. ABC　　11. ABD　　12. AD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\frac{4}{3}$　　14. $\frac{19}{13}$

15. 5. 820;0. 05　　16. 32

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$4S_1+a_1=5$,解得 $S_1=a_1=1$. ……………………(1 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$4S_n+a_n=5$,$4S_{n-1}+a_{n-1}=5$,两式相减整理得 $a_n=\frac{1}{5}a_{n-1}$, ……………………(3 分)

所以$\{a_n\}$是 $a_1=1$,公比 $q=\frac{1}{5}$的等比数列, ……………………(4 分)

故 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{5^{n-1}}$. ……………………(5 分)

(Ⅱ)$S_n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$, ……………………(7 分)

而 $S_n=\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$关于 n 单调递增, ……………………(8 分)

$S_n\geqslant S_1=1$,且 $S_n=\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]<\frac{5}{4}$, ……………………(9 分)

所以 $1\leqslant S_n<\frac{5}{4}$. ……………………(10 分)

18. **解析**　(Ⅰ)由条件及正弦定理可得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=4(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$, ……………………(2 分)

即 $\sin(B+C)=4\sin(A+B)$,所以 $\sin A=4\sin C$. ……………………(3 分)

因为 $\cos C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,所以 $\sin C=\frac{1}{8}$, ……………………(4 分)

所以 $\sin A=\frac{1}{2}$, ……………………(5 分)

又因为 A 为锐角,所以 $A=\frac{\pi}{6}$. ……………………(6 分)

(Ⅱ)$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{3}}{16}$, ……………………(8 分)

所以由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,即$\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{3}}{16}}=\frac{c}{\frac{1}{8}}$,解得 $c=2$, ………………………………………… (10 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{7}+\sqrt{3})\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… (12 分)

19. **解析** (Ⅰ)因为$\triangle ABC$是正三角形,E为AC的中点,

所以 $AC\perp BE$, ………………………………………… (1 分)

又 $BD\perp AC$,且 $BD\cap BE=B$,BD,$BE\subset$平面 BDE,

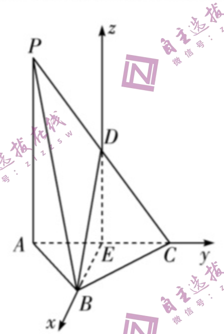
所以 $AC\perp$平面 BDE, ………………………………………… (2 分)

所以 $AC\perp DE$. ………………………………………… (3 分)

因为 $PA\perp$底面 ABC,所以 $PA\perp AC$, ………………………………………… (4 分)

所以 $PA/\!/DE$,所以 D 为 PC 的中点. ………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $DE\perp$底面 ABC,以 E 为坐标原点,EB,EC,ED 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图所示. ………………………………………… (6 分)



由 $PC=2AC=4$,得 $PA=2\sqrt{3}$,所以 $DE=\sqrt{3}$,

则 $B(\sqrt{3},0,0)$,$D(0,0,\sqrt{3})$,$C(0,1,0)$. ………………………………………… (7 分)

所以$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{CD}=(0,-1,\sqrt{3})$.

设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-y+\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$ ………………………………………… (8 分)

令 $y=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$, ………………………………………… (9 分)

又平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$, ………………………………………… (10 分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{(0,1,0)\cdot(1,\sqrt{3},1)}{1\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

由图可知二面角 $E-BD-C$ 的平面角为锐角,

所以二面角 $E-BD-C$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… (12 分)

20. **解析** (Ⅰ)小明恰好答对 2 题,分两种情况:

①答对 2 个 A 类题:$P_1=\frac{C_4^2}{C_5^2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$; ………………………………………… (2 分)

②答对 1 个 A 类题和 1 个 B 类题：$P_2=\frac{C_4^1C_1^1}{C_5^2}\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{45}$. ……………………（4 分）

所以小明恰好答对 2 个题的概率为 $P=P_1+P_2=\frac{11}{45}$. ……………………（6 分）

（Ⅱ）设小明答对 A 类题的个数为 X，答对 B 类题的个数为 Y，

则 X 服从超几何分布， ……………………（7 分）

则 $E(X)=\frac{2\times4}{5}=\frac{8}{5}$，则小明答 A 类题得分的期望为 $5E(X)=8$. ……………………（8 分）

Y 服从二项分布 $B\left(2,\frac{2}{3}\right)$， ……………………（9 分）

则 $E(Y)=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，则小明答 B 类题得分的期望为 $3E(Y)=4$. ……………………（10 分）

综上，小明答 A 类题和答 B 类题得分的期望之和为 $8+4=12$. ……………………（12 分）

21. **解析**　（Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$，

根据题意，可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2}{3},\\ \frac{bc}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ……………………（2 分）

解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=\sqrt{5},\\ c=2,\end{cases}$ ……………………（4 分）

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $F(-2,0)$.

当直线 l 的斜率为 0 时，点 P,Q 为椭圆的左、右顶点，不妨取 $P(-3,0)$，$Q(3,0)$，

此时 $\overrightarrow{FP}=(-1,0)$，$\overrightarrow{FQ}=(5,0)$，则 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=-5$. ……………………（6 分）

当直线 l 的斜率不为 0 或 l 与 x 轴垂直时，设其方程为 $x=my-2$，

代入椭圆 C 的方程并消去 x 得 $(5m^2+9)y^2-20my-25=0$， ……………………（7 分）

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{20m}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$. ……………………（8 分）

$\overrightarrow{FP}=(x_1+2,y_1)$，$\overrightarrow{FQ}=(x_2+2,y_2)$，

所以 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=(x_1+2)(x_2+2)+y_1y_2=my_1\cdot my_2+y_1y_2$

$=(1+m^2)y_1y_2=(1+m^2)\frac{-25}{5m^2+9}=-5+\frac{20}{5m^2+9}$. ……………………（10 分）

因为 $5m^2+9\geqslant9$，所以 $0<\frac{20}{5m^2+9}\leqslant\frac{20}{9}$，

所以 $-5<-5+\frac{20}{5m^2+9}\leqslant-\frac{25}{9}$. ……………………（11 分）

综上，$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$ 的取值范围为 $\left[-5,-\frac{25}{9}\right]$. ……………………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=e^{x-1}-\ln x-1$，则 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，$x>0$，…………（1 分）

由函数 $y=e^{x-1}$ 和 $y=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f'(1)=e^0-1=0$，…………（2 分）

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，…………（4 分）

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$．…………（5 分）

（Ⅱ）由题意得 $g(x)=ae^x-x$，其定义域为 $(0,+\infty)$．

由 $g(x)=ae^x-x=0$，得 $a=\frac{x}{e^x}$，…………（6 分）

令 $h(x)=\frac{x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g(x)$ 有 2 个零点，等价于函数 $y=h(x)$ 与 $y=a$ 的图象有 2 个交点．

…………（7 分）

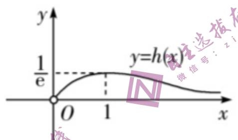
令 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

则函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，…………（8 分）

故 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{e}$，且当 x 趋向于 0 时，$h(x)$ 趋向于 0，…………（9 分）

当 x 趋向于正无穷时，$y=e^x$ 趋向于正无穷的速率远远比 $y=x$ 大，故 $h(x)$ 趋向于 0．…………（10 分）

作出函数 $h(x)$ 的大致图象如下：



结合图象可知，当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$h(x)=\frac{x}{e^x}$ 与 $y=a$ 的图象有 2 个交点，

故 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$．…………（12 分）