海淀区2022—2023学年第二学期期中练习

高三数学

参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	C	D	C	D	B	A	B	B

二、填空题

（11）$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　（12）2

（13）$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一，$\varphi\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$）　　（14）1；$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

（15）①③

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

解：（Ⅰ）由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可知 $BC\perp CC_1$，又因为 $AC\perp BC$，且 $AC\cap CC_1=C$，

所以 $BC\perp$ 平面 CC_1A_1A.

由 $C_1D\subset$ 平面 CC_1A_1A，所以 $BC\perp C_1D$.

在矩形 CC_1A_1A 中，$AD=DA_1=1, CC_1=2$，所以 $DC_1=\sqrt{2}, DC=\sqrt{2}$.

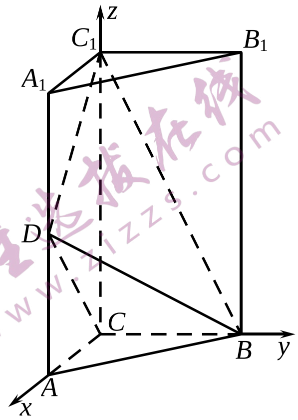
可得 $C_1C^2=C_1D^2+CD^2$，所以 $C_1D\perp CD$.

又因为 $BC\cap CD=C$，

所以 $C_1D\perp$ 平面 BCD.

（Ⅱ）由题意可知，CA,CB,CC_1 两两垂直，如图建立空间直角坐标系 $C-xyz$，

则 $C(0,0,0)$， $D(1,0,1)$， $B(0,1,0)$， $C_1(0,0,2)$，



$\overrightarrow{BD}=(1,-1,1)$， $\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{CD}=(1,0,1)$.

设平面 BC_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$， 则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}x-y+z=0,\\ -y+2z=0.\end{cases}$$

令 $z=1$， 则 $y=2$， $x=1$， 得 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$.

设直线 CD 与平面 BC_1D 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{CD},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线 CD 与平面 BC_1D 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由 $b\sin 2A=\sqrt{3}a\sin B$ 及正弦定理，得 $\sin B\sin 2A=\sqrt{3}\sin A\sin B$.

由倍角公式得 $2\sin B\sin A\cos A=\sqrt{3}\sin A\sin B$.

在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A\neq 0,\sin B\neq 0$，

得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅱ）记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}$.

选条件②：

由（Ⅰ）知 $A=\dfrac{\pi}{6}$， 又由题知 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，

可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

得 $bc=12\sqrt{3}$.

又由条件②，即 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$， 解得 $b=3\sqrt{3},c=4$.

由余弦定理，得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=27+16-2\times3\sqrt{3}\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$=7$

所以 $a=\sqrt{7}$.

选条件③：

又由条件③，即 $\cos C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 以及 $C\in(0,\pi)$，可得 $\sin C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

由（Ⅰ）知 $A=\dfrac{\pi}{6}$，

又由题知 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

得 $bc=12\sqrt{3}$.

由正弦定理得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:3\sqrt{21}:4\sqrt{7}$.

可设 $a=7k,b=3\sqrt{21}k,c=4\sqrt{7}k$.

由 $bc=12\sqrt{3}$，得 $k=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

得 $a=\sqrt{7}$.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）设该户网购生鲜蔬菜次数超过 20 次为事件 C，在 A 组 10 户中超过 20 次的有 3 户，由样本频率估计总体概率，则 $P(C)=\dfrac{3}{10}$.

（Ⅱ）由样本频率估计总体概率，一单元参与网购家庭随机抽取 1 户的网购生鲜蔬菜次数超过 20 次概率为 $\dfrac{3}{10}$，二单元参与网购家庭随机抽取 1 户的网购生鲜蔬菜次数超过 20 次概率为 $\dfrac{7}{10}$.

X 的取值范围为 $\{0,1,2\}$.

$P(X=0)=(1-\dfrac{3}{10})\times(1-\dfrac{7}{10})=\dfrac{21}{100}$，

$P(X=1)=\dfrac{3}{10}\times(1-\dfrac{7}{10})+(1-\dfrac{3}{10})\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{29}{50}$，

$P(X=2)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{21}{100}$.

$E(X)=0\times\dfrac{21}{100}+1\times\dfrac{29}{50}+2\times\dfrac{21}{100}=1$.

（Ⅲ） $D(\xi_1)=D(\xi_2)$.

19. （本小题 14 分）

解：(Ⅰ) 依题意可得：

$$\begin{cases}2b=2,\\ 4\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{6}.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=\sqrt{5},\\ b=1.\end{cases}$

椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$.

(Ⅱ) 依题意，可设直线 l 方程为 $y=kx+m\ (km\neq 0)$， $M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$.

联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}+y^2=1,\\ y=kx+m.\end{cases}$

得 $(5k^2+1)x^2+10kmx+5m^2-5=0$.

$\Delta=(10km)^2-4\cdot(5k^2+1)(5m^2-5)=100k^2-20m^2+20>0$， 即 $5k^2>m^2-1$.

$x_1+x_2=-\dfrac{10km}{5k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{5m^2-5}{5k^2+1}$.

在直线 l 方程 $y=kx+m$ 中，令 $y=0$，得 $x=-\dfrac{m}{k}$，得 $P(-\dfrac{m}{k},0)$.

依题意得 $M'(-x_1,y_1)$，得直线 $M'N$ 方程为 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+x_1}(x+x_1)+y_1$.

令 $x=0$，得 $y_Q=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}$.

所以△ OPQ 的面积为 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|x_P|\cdot|y_Q|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{m}{k}\right|\cdot\left|\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}\right|$.

$x_1y_2+x_2y_1=x_1(kx_2+m)+x_2(kx_1+m)=2kx_1x_2+m(x_1+x_2)$

$=2k\cdot\dfrac{5m^2-5}{5k^2+1}-\dfrac{10km^2}{5k^2+1}=\dfrac{-10k}{5k^2+1}$.

即 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{m}{k}\right|\cdot\left|\dfrac{10k}{10km}\right|=2$，解得 $k=\pm\dfrac{1}{4}$，经检验符合题意.

所以 的值为 $\pm\dfrac{1}{4}$.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时， $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

则 $f(0)=1$.

求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

得 $f'(0)=0$.
所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

（Ⅱ）求导得 $f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-1$.

当 $a\le 0$ 时， $f'(x)<0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\dfrac{\ln a}{a}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-\dfrac{\ln a}{a})$	$-\dfrac{\ln a}{a}$	$(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

由上表可知， $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,-\dfrac{\ln a}{a})$，增区间为 $(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty)$.

综上，当 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,-\dfrac{\ln a}{a})$，增区间为 $(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty)$.

（Ⅲ）将 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值记为 $f(x)_{\max}$，最小值记为 $f(x)_{\min}$.

由题意，若 $\exists x\in[-1,1]$，使得 $|f(x)|\ge 3$ 成立，即 $f(x)_{\max}\ge 3$ 或 $f(x)_{\min}\le -3$.

当 $x\in[-1,1]$ 时， $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-x>-x\ge -1$.

所以若 $\exists x\in[-1,1]$，使得 $|f(x)|\ge 3$ 成立，只需 $f(x)_{\max}\ge 3$.

由（Ⅱ）可知 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调或先减后增，故 $f(x)_{\max}$ 为 $f(-1)$ 与 $f(1)$ 中的较大者，

所以只需当 $f(-1)\ge 3$ 或 $f(1)\ge 3$ 即可满足题意.

即 $f(-1)=\mathrm{e}^{-a}+1\ge 3$ 或 $f(1)=\mathrm{e}^a-1\ge 3$.

解得 $a\le -\ln 2$ 或 $a\ge \ln 4$.
综上所述， a 的取值范围是 $(-\infty,-\ln 2]\cup[\ln 4,+\infty)$.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ）不满足. 令 $i=j=3$，$a_ia_j=16$ 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

（ⅱ）满足. 对于任意 $b_i, b_j(i\geqslant j)$，$b_ib_j=(2i-1)(2j-1)=2(2ij-i-j+1)-1$.

由于 $2ij-i-j+1\geq 1$，故令 $k=2ij-i-j+1$ 即可.

（Ⅱ）（1）对于有穷数列 $\{a_n\}$ 记其非零项中，绝对值最大的一项为 a_p，绝对值最小的一项为 a_q.

故令 $i=j=p$ 时，存在一项 $|a_k|=|a_ia_j|=a_p^{\ 2}$.

又 a_p 是数列 $\{a_n\}$ 非零项中绝对值最大的，所以 $|a_p|\geq a_p^{\ 2}$，即 $0<|a_p|\leq 1$.

再令 $i=j=q$ 时，存在一项 $|a_k|=|a_ia_j|=a_q^{\ 2}$.

又 a_q 是数列 $\{a_n\}$ 非零项中绝对值最小的，所以 $|a_q|\leq a_q^{\ 2}$，即 $|a_q|\geq 1$.

又 $1\leq|a_q|\leq|a_p|\leq 1$，

所以数列所有非零项的绝对值均为 1.

又数列 $\{a_n\}$ 的各项均不相等，所以其至多有 $0,-1,1$ 共 3 项.

所以 $m\leq 3$.

（2）构造数列 $\{a_n\}:0,-1,1$.

其任意两项乘积均为 $0,-1,1$ 之一，满足性质①.

其连续三项满足 $0-(-1)-1=0$，满足性质②.

又其各项均不相等，所以该数列满足条件，此时 $m=3$.

（3）由（1）（2），m 的最大值为 3.

（Ⅲ）（1）首先证明：当 $a_1>0, a_2<-1$ 时，数列满足 $a_{2t-1}>0, a_{2t}<0$, 且 $|a_t|<|a_{t+2}|, t=1,2,3,\cdots$.（*）

因为对于任意数列的连续三项 a_n, a_{n+1}, a_{n+2}，总有 $(a_n-a_{n+1}-a_{n+2})(a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}-a_{n+2})=0$.

即 $a_{n+2}=a_n-a_{n+1}$ 或 $a_{n+2}=a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}$. 不论是哪种情形，均有

当 $a_n>0>a_{n+1}$ 时，$a_{n+2}\geq a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}>a_n>0$，即 $|a_{n+2}|>|a_n|$.

当 $a_n<0<a_{n+1}$ 时，$a_{n+2}\leq a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}<a_n<0$，亦有 $|a_{n+2}|>|a_n|$.

又 $a_1>0>-1>a_2$，故性质（*）得证.

（2）考虑 a_1, a_2, a_3 三项，有 $a_3=a_1-a_2$ 或 $a_3=a_1-\frac{1}{2}a_2$.

若 $a_3=a_1-a_2$，则 $a_1=a_3+a_2<1$，此时令 $i=j=1$，有 $a_1^{\ 2}<a_1$，由性质（*）知不存在 k 使得 $a_k>0$，且 $a_k=a_1^{\ 2}<a_1$.

故只有 $a_3=a_1-\frac{1}{2}a_2$，此时 $a_1=a_3+\frac{1}{2}a_2<\frac{3}{2}$.

因为 $a_5\ge a_3-\frac{1}{2}a_4\ge a_3-\frac{1}{2}(a_2-\frac{1}{2}a_3)>\frac{5}{4}a_3=\frac{5}{2}$，

所以令 $i=j=1$ 时，$a_1^{\ 2}<\frac{9}{4}<a_5$.

由性质（*）知，只有 $a_1^{\ 2}=a_1$ 或 $a_1^{\ 2}=a_3$.

当 $a_1^{\ 2}=a_3$ 时，$a_1=\sqrt{2},a_2=2(a_1-a_3)=2\sqrt{2}-4$，此时令 $i=2,j=1$，$a_2a_1=4-4\sqrt{2}$，

但 $a_4\le a_2-\frac{1}{2}a_3=2\sqrt{2}-5$，即 $|a_4|>|a_2a_1|$，由性质（*）知不存在 k 使得 $a_k=a_2a_1$.

所以 $a_1^{\ 2}=a_1$，即 $a_1=1$，从而 $a_2=-2$.

（3）经验证，数列 $\{a_n\}$：$a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n\text{是奇数},\\-2^{\frac{n}{2}},n\text{是偶数}\end{cases}$ 满足条件，下面证这是唯一满足条件的数列.

假设 a_s 是第一个不满足上述通项公式的项，$s\ge 4$.

当 $s=2t+1,t\ge 2$ 时，只能为 $a_{2t+1}=a_{2t-1}-a_{2t}=2^{t-1}-(-2^t)=3\cdot 2^{t-1}$.

令 $i=2t-1,j=3$，则 $a_ia_j=2^t$.

但 $a_{2t-1}<2^t<a_{2t+1}$，由性质（*），不存在 k 使得 $a_ia_j=a_k$.

当 $s=2t,t\ge 2$ 时，只能为 $a_{2t}=a_{2t-2}-\frac{1}{2}a_{2t-1}=-2^{t-1}-\frac{1}{2}2^{t-1}=-3\cdot 2^{t-2}>-2^t$.

则 $a_{2t+2}\le a_{2t}-\frac{1}{2}a_{2t+1}\le a_{2t}-\frac{1}{2}(a_{2t-1}-\frac{1}{2}a_{2t})=\frac{5}{4}a_{2t}-\frac{1}{2}a_{2t-1}=-\frac{19}{16}\cdot 2^t<-2^t$.

令 $i=2t-2,j=3$，则 $a_ia_j=-2^t$，但 $a_{2t}>-2^t>a_{2t+2}$，由性质（*），不存在 k 使得 $a_ia_j=a_k$.

故不存在不满足上述通项公式的项.

综上，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n\text{是奇数},\\-2^{\frac{n}{2}},n\text{是偶数}.\end{cases}$