

2023 年普通高等学校招生全国统一考试抢分密卷(二)

理科数学

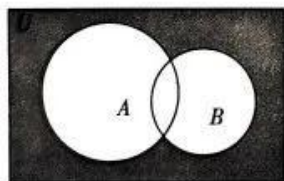
注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在答题卡和试卷的指定位置上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

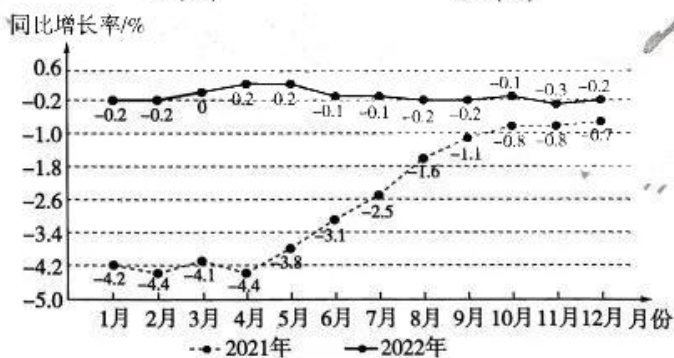
本试卷共 23 题,满分 150 分。考试用时 120 分钟。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知复数 z 满足 $(1+i)z=3+yi$ ($y \in \mathbf{R}$),且 $z \cdot \bar{z}=5$,则复数 z 的虚部为
A. 1 B. -1 C. 1 或 -1 D. -1 或 -2
- 已知全集 $U = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 4\}$,集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | x^2 - 4 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | 0 < x < 4\}$,则图中阴影部分表示的集合为
A. $\{1\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{4\}$ D. $\{3\}$



第 2 题图

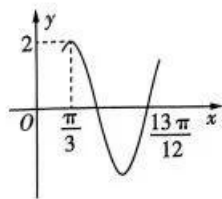


第 3 题图

- 某电信部门统计了所辖区域 2021 年和 2022 年固定电话用户数的同比增长率(同比增长率 = $\frac{\text{今年用户数} - \text{去年同期用户数}}{\text{去年同期用户数}} \times 100\%$),并绘制了如图所示的折线图,则下列说法错误的是
A. 2022 年固定电话用户数的同比增长率比 2021 年固定电话用户数的同比增长率稳定
B. 这两年固定电话用户数的同比增长率同期相差最大的是 4 月份
C. 2021 年和 2022 年固定电话用户数的同比增长率的中位数分别为 -2.8% , -0.1%
D. 2022 年 5 月份的固定电话用户数约是 2020 年 5 月份的固定电话用户数的 96.4%
- 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ 2x - 5y + 3 \leq 0 \\ 2x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$,则 $z = x - 3y$ 的最小值为
A. $-\frac{5}{3}$ B. -2 C. $-\frac{10}{3}$ D. $-\frac{13}{3}$

抢分密卷(二) 理科数学试题第 1 页(共 4 页)

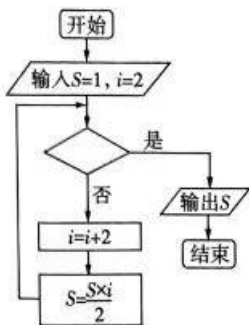
5. 如图是函数 $f(x) = -2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in (0, \pi)$) 的部分图象, 则 $f(\frac{\pi}{6}) =$



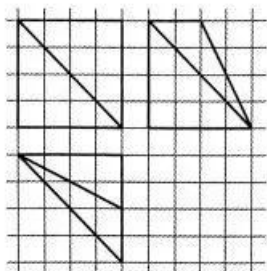
- A. 1
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\sqrt{2}$

6. 执行如图所示的程序框图, 若输出的 $S = 5\ 040$, 则判断框中可填

- A. $i \geq 8$ B. $i \geq 10$ C. $i \geq 14$ D. $i \geq 16$



第6题图



第7题图

7. 如图, 网格中小正方形的边长均为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为

- A. $\frac{40}{3}$ B. 16 C. $\frac{80}{3}$ D. 32

8. 已知在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 4, AD = 2\sqrt{3}$, E 为 BC 的中点, $\vec{DA} \cdot \vec{CB} = \vec{DA} \cdot \vec{CA} = 12$, 则 \vec{AE} 与 \vec{DE} 的夹角的余弦值为

- A. $\frac{1}{7}$ 或 $\frac{13}{19}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{13}{19}$ D. $\frac{1}{7}$ 或 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

9. 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB = BC = 4, AD = DC = 2, PA = PB = PC = PD = \sqrt{10}$, M 为 BC 的中点, 则异面直线 AB 与 PM 所成角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{6}}{15}$ C. $\frac{17\sqrt{6}}{60}$ D. $\frac{41\sqrt{6}}{120}$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 F_2 为圆心、半焦距 c 为半径的圆与双曲线的渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 交于异于坐标原点的点 M , 若 $|MF_2|, |MF_1|, |F_1F_2|$ 成等差数列, 则该双曲线的离心率为

- A. $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, A = \frac{\pi}{3}, 2a + \sqrt{6}c \sin(\frac{\pi}{4} + B) = \sqrt{3}b(\sin C + \cos C)$, $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$. 若 $\angle BAC$ 的平分线 AD 与 BC 交于点 D , 则 $AD =$

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = xe^{mx} \ln x - me^2 + mx^2 e^{mx} - \frac{e^2 \ln x}{x}$ 有 4 个零点, 则实数 m 的取值范围为

- A. $(-\frac{2}{e^2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{e}, 0)$ C. $(-\frac{2}{e^2}, -\frac{1}{e})$ D. $(-\frac{2}{e^2}, -\frac{1}{e}) \cup (0, +\infty)$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 给定一个正整数 m , 如果两个整数 a 和 b 满足 $a - b$ 能够被 m 整除, 那么就称整数 a 与 b 对模 m 同余, 记作 $a \equiv b \pmod{m}$. 某人将分别标有数字 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的 7 个相同小球装入一个不透明的盒子中, 并从中随机取出两个小球, 则取到的两个小球所标数字对模 3 同余的概率为 _____.
14. 已知 $m \in \mathbf{R}$, $(x+1)^6(2x-m)$ 的展开式中的各项系数之和为 256, 则 $m =$ _____; $(x+1)^6(2x-m)$ 的展开式中 x^3 的系数为 _____.
15. 已知过抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点 F 且斜率大于 0 的直线与 C 交于 A, B 两点(点 A 在第一象限), 过点 A 作 C 的准线的垂线, 垂足为 E , 若线段 EF 交 y 轴于点 D , 交 C 于点 M , $|AB| = \frac{32}{3}$, 则 $|DM| =$ _____.
16. 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)$ 为奇函数, $f(-x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{e}$, 则 $\sum_{i=1}^{2023} f(3i-2) =$ _____.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题:共60分.

17. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2a_n - 6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

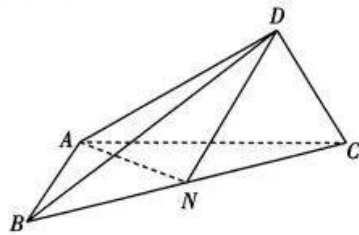
(2) 若 $b_n = \log_2 \frac{4a_{n+1}}{3}$, 求数列 $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分)

如图, 已知三棱锥 $D-ABC$ 中, 平面 $DAC \perp$ 平面 ABC , $AB = DC = 1$, $AC = BD = 2$, $BD \perp DC$.

(1) 证明: 平面 $DBC \perp$ 平面 ABD ;

(2) 若 N 为 BC 的中点, 求平面 ADN 与平面 BDC 所成锐二面角的余弦值.



19. (12分)

为激发学生的爱国热情, 某校对初二到高三每个年级其中一个班的学生进行党史知识问卷调查, 统计出这 5 个班共有 50 名学生的问卷成绩(满分 100 分)在 90 分以上, 统计结果如下:

班级	初二(1)班	初三(2)班	高一(3)班	高二(4)班	高三(5)班
问卷成绩在 90 分以上的学生人数	5	10	15	15	5

(1) 从这 50 名学生中按年级利用分层抽样的方法随机抽取 20 名学生, 再从抽取的 20 名学生中随机抽取 2 名学生进行党史知识演讲.

① 求随机抽取的 2 人中至少有 1 人来自高三(5)班的概率;

② 设随机抽取的 2 人中高三(5)班学生的人数为 X , 求 X 的分布列与期望 $E(X)$.

抢分密卷(二) 理科数学试题第3页(共4页)

- (2) 若从初二(1)班和高三(5)班问卷成绩在 90 分以上的 10 名学生中每周随机抽取 2 名学生担任党史知识宣传大使,一周抽取 1 次,连续抽取 3 周(被抽到过的学生可以再次被抽取),求这 3 周恰有 1 次抽到 2 个不同年级学生的概率.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+a}$ ($a \geq 1$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a=1$ 时,对任意的 $x \in (-1,0)$,不等式 $\frac{e^{x+1}f(x) + m + 1}{x} \geq \frac{e^{x+1}}{x(x+a)} + x + 2$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a < \sqrt{5}$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在 C 上,且 $|PF_1| =$

$3|PF_2|$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 若 M, N 为 C 上关于 x 轴对称的两点,直线 NF_2 与 C 交于另一点 D ,求 $\triangle DF_2M$ 面积的最大值.

(二) 选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2\sin \varphi \\ y = 1 - \cos 2\varphi \end{cases}$ (φ 为参数). 以坐标原点为极

点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程是 $\rho \cos \theta - a \rho \sin \theta - 2 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 求曲线 C 的普通方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点,点 P 的坐标为 $(2, 0)$,求 $|PM| \cdot |PN|$ 的取值范围.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知正实数 m, n 满足 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 4$. 证明:

(1) $m + 8n \geq \frac{25}{4}$;

(2) $\frac{1}{m+1} + \frac{2}{n+2} \leq \frac{4}{3}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

