2021届高三八省联考数学预测模拟卷

一、单选题本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=1\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|y=x\right\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

2．若复数（1－i）（a+i）在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是

A．（－∞，1）　　B．（－∞，－1）

C．（1，+∞）　　D．（－1，+∞）

3．△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c．已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a$=2，$c=\sqrt{2}$，则 C=

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

4．$(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为

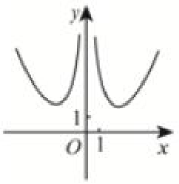
A．-80　　B．-40　　C．40　　D．80

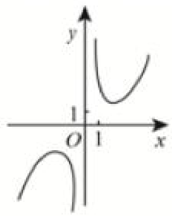
5．新高考的改革方案开始实施后，某地学生需要从化学，生物，政治，地理四门学科中选课，每名同学都要选择其中的两门课程．已知甲同学选了化学，乙与甲没有相同的课程，丙与甲恰有一门课相同，丁与丙也没有相同课程．则以下说法正确的是（）

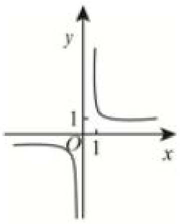
A．丙没有选化学　　B．丁没有选化学

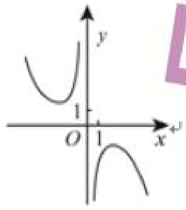
C．乙丁可以两门课都相同　　D．这四个人里恰有2个人选化学

6．（本题5分）函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 在$\triangle ABC$中，E为AC上一点，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$，$P$为$BE$上任一点，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m>0,n>0)$，则$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}$的最小值是（　　）

A. 9　　B. 10

C. 11　　D. 12

8. 设函数$f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中$a<1$，若存在唯一的整数x_0，使得$f(x_0)<0$，则a的取值范围是（　）

A. $\left[-\frac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2e},1\right)$

二、多选题本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分．

9. 若$a<b<-1$，$c>0$则下列不等式中一定成立的是（　　）

A. $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$　　B. $a-\frac{1}{b}<b-\frac{1}{a}$

C. $\ln(b-a)>0$　　D. $(\frac{a}{b})^c>(\frac{b}{a})^c$

10．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$且$|F_1F_2|=2$，点$P(1,1)$在椭圆内部，点$Q$在椭圆上，则以下说法正确的是（　　）

A．$|QF_1|+|QP|$的最小值为$2a-1$

B．椭圆C的短轴长可能为2

C．椭圆C的离心率的取值范围为$\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

D．若$\overrightarrow{PF_1}=\overrightarrow{F_1Q}$，则椭圆$C$的长轴长为$\sqrt{5}+\sqrt{17}$

11．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}=S_n+2a_n+1$，数列$\left\{\frac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则下列选项正确的为（　　）

A．数列$\{a_n+1\}$是等差数列　　B．数列$\{a_n+1\}$是等比数列

C．数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n-1$　　D．$T_n<1$

12．已知定义在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上的函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且$f(0)=0$，$f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则下列判断中正确的是(　　)

A．$f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{6}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$　　B．$f\left(\ln\frac{\pi}{3}\right)>0$

C．$f\left(\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$　　D．$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

三、填空题本题共4小题，每小题5分，共20分．

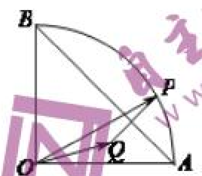
13.（本题 5 分）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 $45°$，且 $|\vec{a}|=1,|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$，则 $|\vec{b}|=$__________.

14.（本题 5 分）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，$a=1$，则 $b=$___.

15.（本题 5 分）从甲、乙等 8 名志愿者中选 5 人参加周一到周五的社区服务，每天安排一人，每人只参加一天. 若要求甲、乙两人至少选一人参加，且当甲、乙两人都参加时，他们参加社区服务的日期不相邻，那么不同的安排种数

为____________. (用数字作答)

16.（本题 5 分）如图，扇形 AOB 的圆心角为 $90°$，半径为 1，点 P 是圆弧 AB 上的动点，作点 P 关于弦 AB 的对称点 Q，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的取值范围为____.



四、解答题本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题 10 分）△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知△ABC 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$

(1) 求 $\sin B\sin C$；

(2) 若 $6\cos B\cos C=1, a=3$, 求△ABC 的周长.

18.（本题 12 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\ldots+(2n-1)a_n=2n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

19.（本题 12 分）改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来，移动支

付方式之一．为了解某校学生上个月 A，B 两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A，B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

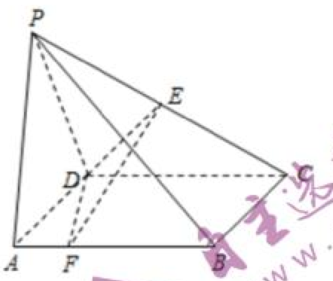
交付金额（元） 支付方式	(0, 1000]	(1000, 2000]	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

（Ⅰ）从全校学生中随机抽取 1 人，估计该学生上个月 A，B 两种支付方式都使用的概率；

（Ⅱ）从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 A 的学生中，随机抽查 3 人，发现他们本月的支付金额都大于 2000 元．根据抽查结果，能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化？说明理由．

20．（本题 12 分）如图，在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，且 $AD=PD=1$，平面 PCD⊥平面 ABCD，$\angle PDC=120^{\circ}$，点 E 为线段 PC 的中点，点 F 是线段 AB 上的一个动点．



（Ⅰ）求证：平面 $DEF\perp$ 平面 PBC；

（Ⅱ）设二面角 $C-DE-F$ 的平面角为 θ，试判断在线段 AB 上是否存在这样的点 F，使得 $\tan\theta=2\sqrt{5}$

若存在，求出$\frac{|AF|}{|FB|}$的值；若不存在，请说明理由.

21．(本题 12 分)已知点 $A(0，-2)$，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，F是椭圆 E的右焦点，直线 AF的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O为坐标原点.

(1)求 E的方程；

(2)设过点 A的动直线 l与 E相交于 P，Q两点.当△OPQ的面积最大时，求 l的方程.

22．(本题 12 分)已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.

（1）证明：$f'(x)$在区间$(0，\pi)$存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0，\pi]$时，$f(x)\geqslant ax$，求 a的取值范围.

参考答案

1. B

集合中的元素为点集，由题意，可知集合 A 表示以 $(0,0)$ 为圆心，1为半径的单位圆上所有点组成的集合，集合 B 表示直线 $y=x$ 上所有的点组成的集合，又圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=x$ 相交于两点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $A\cap B$ 中有 2 个元素. 故选 B.

2. B

设 $z=(1-i)(a+i)=(a+1)+(1-a)i$，因为复数对应的点在第二象限，所以 $\begin{cases}a+1<0\\1-a>0\end{cases}$，解得：$a<-1$，

故选 B.

3. B

解：sinB=sin（A+C）=sinAcosC+cosAsinC，

∵sinB+sinA（sinC﹣cosC）=0，

∴sinAcosC+cosAsinC+sinAsinC﹣sinAcosC=0，

∴cosAsinC+sinAsinC=0，

∵sinC≠0，

∴cosA=﹣sinA，

∴tanA=﹣1，

∵$\frac{\pi}{2}$<A<π，

∴A=$\frac{3\pi}{4}$，

由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，

∵a=2，c=$\sqrt{2}$，

∴sinC=$\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{2}$，

∵a>c，

∴C=$\frac{\pi}{6}$，

4. C

$(x+y)(2x-y)^5=x(2x-y)^5+y(2x-y)^5$，

由$(2x-y)^5$展开式的通项公式$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(-y)^r$可得：

当$r=3$时，$x(2x-y)^5$展开式中x^3y^3的系数为$C_5^3\times2^2\times(-1)^3=-40$

当$r=2$时，$y(2x-y)^5$展开式中x^3y^3的系数为$C_5^2\times2^3\times(-1)^2=80$，

则x^3y^3的系数为$80-40=40$.

5. D

根据题意可得，∵甲选择了化学，乙与甲没有相同课程，∴乙必定没选化学；

又∵丙与甲有一门课相同，假设丙选择了化学，而丁与丙无相同课程，则丁一定没选化学；

若丙没选化学，又∵丁与丙无相同课程，则丁必定选择了化学.

综上，必定有甲，丙或甲，丁这两种情况下选择化学，故可判断A，B不正确，D正确.

假设乙丁可以两门课都相同，由上面分析可知，乙丁都没有选择化学，只能从其它三科中选两科.不妨假设选的是生物、政治，则甲选的是化学和地理，而丙和甲共同选择了化学，另一门课丙只能从生物、政治中选一科，这样与“丁与丙也没有相同课程”矛盾，故假设不成立

6．B

解：$\because x\neq 0, f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{x^{2}}=-f(x)\therefore f(x)$ 为奇函数，舍去 A,

$\because f(1)=e-e^{-1}>0\therefore$ 舍去 D;

$\because f'(x)=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})x^{2}-(e^{x}-e^{-x})2x}{x^{4}}=\dfrac{(x-2)e^{x}+(x+2)e^{-x}}{x^{3}}\therefore x>2, f'(x)>0$ ，

7．D

由题意可知：$\overline{AP}=m\overline{AB}+n\overline{AC}=m\overline{AB}+3n\overline{AE}$，

P,B,E 三点共线，则：$m+3n=1$，据此有：

$$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{3}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+3n)=6+\frac{9n}{m}+\frac{m}{n}\geq 6+2\sqrt{\frac{9n}{m}\times\frac{m}{n}}=12,$$

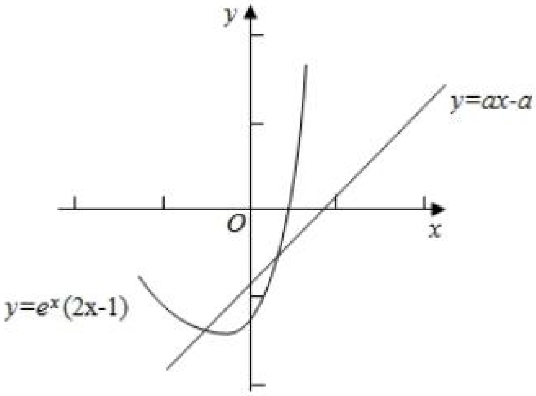
当且仅当 $m=\dfrac{1}{2},n=\dfrac{1}{6}$ 时等号成立.

综上可得：$\dfrac{3}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值是 12.

8．D

设 $g(x)=e^{x}(2x-1)$，$y=a(x-1)$，

由题意知，函数 $y=g(x)$ 在直线 $y=ax-a$ 下方的图象中只有一个点的横坐标为整数，



$g'(x)=e^x(2x+1)$，当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$.

所以，函数 $y=g(x)$ 的最小值为 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{2}}$.

又 $g(0)=-1$，$g(1)=e>0$.

直线 $y=ax-a$ 恒过定点 $(1,0)$ 且斜率为 a，

故 $-a>g(0)=-1$ 且 $g(-1)=-\frac{3}{e}\geq -a-a$，解得 $\frac{3}{2e}\leq a<1$，故选

9．BD

由函数 $y=x-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为增函数可知，当 $a<b<-1$ 时，$a-\frac{1}{a}<b-\frac{1}{b}$，故选项 A 错误；

由函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为增函数可知，当 $a<b<-1$ 时，$a+\frac{1}{a}<b+\frac{1}{b}$，即 $a-\frac{1}{b}<b-\frac{1}{a}$，故选项 B 正确；

由于 $a<b$，则 $b-a>0$，但不确定 $b-a$ 与 1 的大小关系，故 $\ln(b-a)$ 与 0 的大小关系不确定，故选项 C 错误；

由 $a<b<-1$ 可知，$\frac{a}{b}>1$，$0<\frac{b}{a}<1$，而 $c>0$，则 $\left(\frac{a}{b}\right)^c>1>\left(\frac{b}{a}\right)^c>0$，故选项 D 正确.

10．ACD

A. 因为$|F_1F_2|=2$，所以$F_2(1,0),|PF_2|=1$，所以$|QF_1|+|QP|=2a-|QF_2|+|QP|\ge 2a-|PF_2|=2a-1$，当$Q,F_2,P$，三点共线时，取等号，故正确；

B. 若椭圆C的短轴长为2，则$b=1,a=2$，所以椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}>1$，则点$P$在椭圆外，故错误；

C. 因为点$P(1,1)$在椭圆内部，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，又$a-b=1$，所以$b=a-1$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{a-1}<1$，即$a^2-3a+1>0$，解得$a>\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$，所以$\sqrt{a}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以$e=\frac{1}{\sqrt{a}}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以椭圆$C$的离心率的取值范围为$\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$，故正确；

D. 若$\overrightarrow{PF_1}=\overrightarrow{F_1Q}$，则$F_1$为线段$PQ$的中点，所以$Q(-3,-1)$，所以$\frac{9}{a}+\frac{1}{b}=1$，又$a-b=1$，即$a^2-11a+9=0$，解得$a=\frac{11+\sqrt{85}}{2}=\frac{22+2\sqrt{85}}{4}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{17})^2}{4}$，所以$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$，所以椭圆$C$的长轴长为$\sqrt{5}+\sqrt{17}$，

11．BCD

解：由$S_{n+1}=S_n+2a_n+1$即为$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_n+1$，

可化为$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，由$\boldsymbol{S_1=a_1=1}$，可得数列$\{a_n+1\}$是首项为2，公比为2的等比数列，

则$a_n+1=2^n$，即$a_n=2^n-1$，

又$\frac{2^n}{a_na_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，可得$T_n=1-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<1$，

12．CD

令$g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$，

因为 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，

所以 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}<0$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

因此函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

因此 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，即 $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{6}}>\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{4}}$，即 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>\dfrac{\sqrt{6}}{2}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，故 A 错；

又 $f(0)=0$，所以 $g(0)=\dfrac{f(0)}{\cos 0}=0$，所以 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}\le 0$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

因为 $\ln\dfrac{\pi}{3}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f\left(\ln\dfrac{\pi}{3}\right)<0$，故 B 错；

又 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以 $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{6}}>\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{3}}$，即 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 C 正确；

又 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以 $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{4}}>\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{3}}$，即 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 D 正确；

13．$3\sqrt{2}$：$\because \vec{a},\vec{b}$ 的夹角 45°，$|\vec{a}|=1$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{b}|$，$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4-4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{b}|+|\vec{b}|^2=10$，

$\therefore |\vec{b}|=3\sqrt{2}$．

14．$\dfrac{21}{13}$

因为 $\cos A=\dfrac{4}{5},\cos C=\dfrac{5}{13}$，且 A,C 为三角形的内角，所以 $\sin A=\dfrac{3}{5},\sin C=\dfrac{12}{13}$，

$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{63}{65}$，又因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{21}{13}$.

15．5040.

分两类，一类是甲乙都参加，另一类是甲乙中选一人，方法数为$N=A_6^3A_4^2+C_2^1C_6^4A_5^5=1440+3600=5040$。填 5040.

16．$\left[\sqrt{2}-1,1\right]$.

详解：以点 O 为坐标原点，以 OA 所在直线作 x 轴，以 OB 所在直线作 y 轴，建立直角坐标系. 则 A(1，0)，B(0，1)，直线 AB 的方程为 x+y−1=0，设 P$(\cos\alpha,\sin\alpha)$ $(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2})$，$Q(x_0,y_0)$，所以 PQ 的中点$(\frac{x_0+\cos\alpha}{2},\frac{y_0+\sin\alpha}{2})$，由题得$\begin{cases}k_{PQ}=\frac{\sin\alpha-y_0}{\cos\alpha-x_0}=1\\ \frac{x_0+\cos\alpha}{2}+\frac{y_0+\sin\alpha}{2}-1=0\end{cases}$，$\therefore x_0=1-\sin\alpha$　$y_0=1-\cos\alpha$ 所以

$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\cos\alpha(1-\sin\alpha)+\sin\alpha(1-\cos\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$ 设

$t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}),t\in[1,\sqrt{2}]$，所以$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$，所以$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=1-t^2+t$，$t\in[1,\sqrt{2}]$所以当 t=1 时函数取最大值 1，当 t=$\sqrt{2}$ 时函数取最小值$\sqrt{2}-1$.

17．(1) $\sin B\sin C=\frac{2}{3}$ (2)　$3+\sqrt{33}$.

（1）由题设得$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a^2}{3\sin A}$，即$\frac{1}{2}c\sin B=\frac{a}{3\sin A}$.

由正弦定理得$\frac{1}{2}\sin C\sin B=\frac{\sin A}{3\sin A}$.

故$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$.

（2）由题设及（1）得$\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\frac{1}{2}$,，即$\cos(B+C)=-\frac{1}{2}$.

所以$B+C=\frac{2\pi}{3}$，故$A=\frac{\pi}{3}$.

由题设得$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{3\sin A}$，即$bc=8$.

由余弦定理得$b^2+c^2-bc=9$，即$(b+c)^2-3bc=9$，得$b+c=\sqrt{33}$.

故$\triangle ABC$的周长为$3+\sqrt{33}$.

18．(1) $a_n=\frac{2}{2n-1}$；(2) $\frac{2n}{2n+1}$.

（1）数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+\ldots+(2n-1)a_n=2n$

$n\geq 2$时，$a_1+3a_2+\ldots+(2n-3)a_{n-1}=2(n-1)$

$\therefore (2n-1)a_n=2$

$\therefore a_n=\frac{2}{2n-1}$

当$n=1$时，$a_1=2$，上式也成立

$\therefore a_n=\frac{2}{2n-1}$

（2）$\frac{a_n}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore$数列$\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$的前$n$项和

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

19.

(Ⅰ)由题意可知，两种支付方式都是用的人数为：$100-30-25-5=40$ 人，则：

该学生上个月 A，B 两种支付方式都使用的概率 $p=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$.

(Ⅱ)由题意可知，

仅使用 A 支付方法的学生中，金额不大于 1000 的人数占 $\dfrac{3}{5}$，金额大于 1000 的人数占 $\dfrac{2}{5}$，

仅使用 B 支付方法的学生中，金额不大于 1000 的人数占 $\dfrac{2}{5}$，金额大于 1000 的人数占 $\dfrac{3}{5}$，

且 X 可能的取值为 0, 1, 2.

$p(X=0)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$，$p(X=1)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{13}{25}$，$p(X=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2
$p(X)$	$\dfrac{6}{25}$	$\dfrac{13}{25}$	$\dfrac{6}{25}$

其数学期望：$E(X)=0\times\dfrac{6}{25}+1\times\dfrac{13}{25}+2\times\dfrac{6}{25}=1$.

(Ⅲ)我们不认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化. 理由如下：

随机事件在一次随机实验中是否发生是随机的，是不能预知的，随着试验次数的增多，频率越来越稳定于概率. 学校是一个相对消费稳定的地方，每个学生根据自己的实际情况每个月的消费应该相对固定，出现题中这种现象可能是发生了“小概率事件”.

20.

解：(Ⅰ) ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $BC\perp DC$.

∵ 平面 PCD $\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，∴ $BC\perp$ 平面 PCD.

$\because DE \subset$ 平面 PDC，$\therefore BC \perp DE$.

$\because AD = PD = DC$，点 E 为线段 PC 的中点，$\therefore PC \perp DE$.

又$\because PC \cap CB = C$，$\therefore DE \perp$ 平面 PBC.

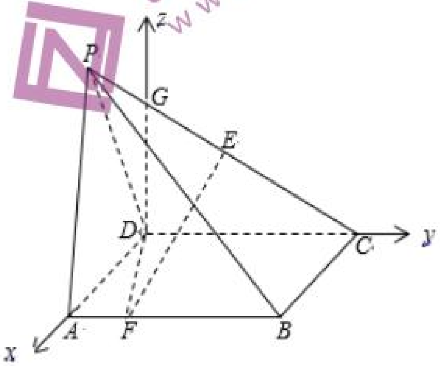
又$\because DE \subset$ 平面 DEF，$\therefore$ 平面 DEF $\perp$ 平面 PBC.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $BC \perp$ 平面 PCD，$\because AD // BC$，$\therefore AD \perp$ 平面 PCD.

在平面 PCD 内过 D 作 $DG \perp DC$ 交 PC 于点 G，

$\therefore AD \perp DG$，故 DA，DC，DG 两两垂直，以 D 为原点，

以 DA，DC，DG 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$.



因为 $AD = PD = 1$，$\because \angle PCD = 120^\circ$，$\therefore PC = \sqrt{3}$.

$\because AD \perp$ 平面 PCD，则 $D(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$P\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

又 E 为 PC 的中点，$E\left(0,\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

假设在线段 AB 上存在这样的点 F，使得 $\tan\theta = 2\sqrt{3}$，设 $F(1,m,0)(m>0)$，$\overrightarrow{DE} = \left(0,\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

$\overrightarrow{DF} = (1,m,0)$，

设平面 DEF 的法向量为 $\vec{n_1}=(x,y,z)$， 则 $\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x+my=0\\ \frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0\end{cases}$， 令 $y=\sqrt{3}$， 则 $z=-1,\therefore x=-\sqrt{3}m$， 则 $\vec{n_1}=\left(-\sqrt{3}m,\sqrt{3},-1\right)$

$\because$ $AD\perp$ 平面 PCD， $\therefore$ 平面 PCD 的一个法向量 $\vec{n_2}=(1,0,0)$，$\tan\theta=2\sqrt{3}$，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{13}}{13}$

$\therefore\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle\right|=\frac{\left|-\sqrt{3}m\right|}{\sqrt{3m^2+3+1}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

$\because m>0$， 解得 $m=\frac{1}{3}$， $\therefore\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{1}{2}$

21．（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ （2） $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$

（1）设 $F(c,0)$， 因为直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$， $A(0,-2)$

所以 $\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$， $c=\sqrt{3}$.

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},b^2=a^2-c^2$

解得 $a=2,b=1$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）解：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$

由题意可设直线 l 的方程为： $y=kx-2$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx-2,\end{cases}$消去$y$得$(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$，

当$\Delta=16(4k^2-3)>0$，所以$k^2>\dfrac{3}{4}$，即$k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或$k>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时

$x_1+x_2=\dfrac{16k}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{12}{1+4k^2}$.

所以$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\dfrac{16k}{1+4k^2}\right)^2-\dfrac{48}{1+4k^2}}$

$=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

点O到直线l的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}$

所以$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}d|PQ|=\dfrac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，

设$\sqrt{4k^2-3}=t>0$，则$4k^2=t^2+3$，

$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{4t}{t^2+4}=\dfrac{4}{t+\dfrac{4}{t}}\le\dfrac{4}{2\sqrt{4}}=1$，

当且仅当$t=2$，即$\sqrt{4k^2-3}=2$，

解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$时取等号，

满足$k^2>\dfrac{3}{4}$

所以ΔOPQ的面积最大时直线l的方程为：$y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$或$y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

22.

（1）$f'(x)=2\cos x-\cos x+x\sin x-1=\cos x+x\sin x-1$

令$g(x)=\cos x+x\sin x-1$，则$g'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

当$x\in(0,\pi)$时，令$g'(x)=0$，解得：$x=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$；当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$g'(x)<0$

$\therefore g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增；在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减

又$g(0)=1-1=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0$，$g(\pi)=-1-1=-2$

即当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g(x)>0$，此时$g(x)$无零点，即$f'(x)$无零点

$\because g\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot g(\pi)<0$　　$\therefore \exists x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得$g(x_0)=0$

又$g(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减　　$\therefore x=x_0$为$g(x)$，即$f'(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上的唯一零点

综上所述：$f'(x)$在区间$(0,\pi)$存在唯一零点

（2）若$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geq ax$，即$f(x)-ax\geq 0$恒成立

令$h(x)=f(x)-ax=2\sin x-x\cos x-(a+1)x$

则$h'(x)=\cos x+x\sin x-1-a$，$h''(x)=x\cos x=g'(x)$

由（1）可知，$h'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增；在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减

且$h'(0)=-a$，$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-2}{2}-a$，$h'(\pi)=-2-a$

$\therefore h'(x)_{\min}=h'(\pi)=-2-a$，$h'(x)_{\max}=h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-2}{2}-a$

①当$a\leq-2$时，$h'(x)_{\min}=h'(\pi)=-2-a\geq0$，即$h'(x)\geq0$在$[0,\pi]$上恒成立

$\therefore h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增

$\therefore h(x)\geq h(0)=0$，即$f(x)-ax\geq0$，此时$f(x)\geq ax$恒成立

②当$-2<a\leqslant0$时，$h'(0)\geq0$，$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$h'(\pi)<0$

$\therefore\exists x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得$h'(x_1)=0$

$\therefore h(x)$在$[0,x_1)$上单调递增，在$(x_1,\pi]$上单调递减

又$h(0)=0$，$h(\pi)=2\sin\pi-\pi\cos\pi-(a+1)\pi=-a\pi\geq0$

$\therefore h(x)\geq0$在$[0,\pi]$上恒成立，即$f(x)\geq ax$恒成立

③当$0<a<\frac{\pi-2}{2}$时，$h'(0)<0$，$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-2}{2}-a>0$

$\therefore\exists x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$h'(x_2)=0$

$\therefore h(x)$在$[0,x_2)$上单调递减，在$\left(x_2,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

$\therefore x\in(0,x_2)$时，$h(x)<h(0)=0$，可知$f(x)\geq ax$不恒成立

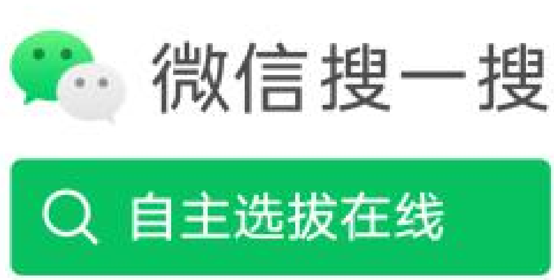
④当$a\geq\dfrac{\pi-2}{2}$时，$h'(x)_{\max}=h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi-2}{2}-a\leq 0$

$\therefore h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减　　$\therefore h(x)<h(0)=0$，可知$f(x)\geq ax$不恒成立综上所述：$a\in(-\infty,0]$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》