

绝密★启用前

名校联盟·2023届高三5月冲刺压轴大联考

数 学

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2(x - 2023) < 1\}$, $B = \mathbf{N}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素个数为

- A. 1 B. 2 C. 2023 D. 2024

2. 已知复数 $\frac{2+3i}{a-i}$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 阅读下列材料:有理数都能表示成 $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, 且 $q \neq 0$, p 与 q 互质) 的形式, 从而

有理数集 $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, \text{且 } q \neq 0, p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}$, 任何有理数都可以化为有限小数或无限循环小数; 反之, 任一有限小数或者无限循环小数也可以化为 $\frac{p}{q}$ 的形式, 从而是有理数.

例如: $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$. 循环小数 $1.\dot{2}7$ 化成分数为

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{28}{27}$ C. $\frac{82}{81}$ D. $\frac{14}{11}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC=3$, 向量 \overrightarrow{AB} 在向量 \overrightarrow{AC} 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, 点 D 是 BC

边上靠近 C 的三等分点, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$

- A. 3 B. 6 C. 7 D. 9

5. 已知 α 是直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的倾斜角, 则 $\frac{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$ 的值为

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{20}$

6. 学校校园从教室到寝室的一排路灯共12盏, 按照规定, 如果两端有坏了的路灯或者中间同时坏了相邻的两盏或两盏以上的路灯, 就必须马上维修, 已知这排路灯坏了3盏, 则这排路灯必须马上维修的概率为

- A. $\frac{41}{55}$ B. $\frac{21}{55}$ C. $\frac{21}{44}$ D. $\frac{23}{44}$

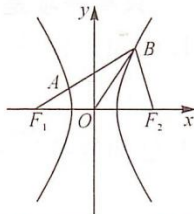
【高三数学 第1页(共6页)】

7. 定义:与圆锥的底面和各母线均相切的球,称为圆锥的内切球,此圆锥称为球的外切圆锥.已知某圆锥的内切球半径等于1,则该圆锥体积的最小值为

- A. $\frac{5\pi}{9}$ B. 3π C. $\frac{8\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{2}$

8. 如图, F_1, F_2 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点,过 F_1 的直线交双曲线的左、右两支于 A, B 两点,且 $|BF_1| = 4|AF_1|, |OB| = \sqrt{a^2 + b^2}$,则双曲线 C 的离心率为

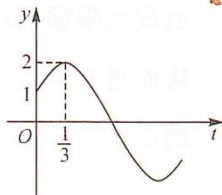
- A. $\frac{\sqrt{29}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{29}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{58}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{58}}{4}$



二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 如图是某质点作简谐运动的部分图象,位移 y (单位: mm) 与时间 t (单位: s) 之间的函数关系式是 $y = A \sin(\omega t + \varphi) \left(A > 0, \omega > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right)$, 则下列命题正确的是

- A. 该简谐运动的初相为 $\frac{\pi}{6}$
B. 该简谐运动的频率为 $\frac{1}{2\pi}$
C. 前6秒该质点的位移为12 mm
D. 当 $t \in \left[\frac{4}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$ 时,位移 y 随着时间 t 的增大而增大



10. 下列说法中正确的是

- A. 已知离散型随机变量 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$, 则 $D(3X+2) = \frac{14}{3}$
B. 一组数据 148, 149, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 161 的第75百分位数为158
C. 若 $P(A) = \frac{1}{4}, P(\bar{B}) = \frac{2}{3}, P(AB) = \frac{1}{12}$, 则事件 A 与 B 相互独立
D. 根据分类变量 x 与 y 的观测数据, 计算得到 $\chi^2 = 3.154$, 依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验可得: 变量 x 与 y 独立, 这个结论错误的概率不超过 0.05

附: χ^2 独立性检验中几个常用的概率值与相应的临界值

α	0.1	0.05	0.01
χ^2_{α}	2.706	3.841	6.635

【高三数学 第2页(共6页)】

11. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$, 直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0$, 则

- A. 直线 l 恒过定点
- B. 直线 l 能表示平面直角坐标系内每一条直线
- C. 对任意实数 m , 直线 l 都与圆 C 相交
- D. 直线 l 被圆 C 截得的弦长的最小值为 $2\sqrt{11}$

12. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为正方体表面上的动点, N 为线

段 AC_1 上的动点, 若直线 AM 与 AB 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则下列说法正确的是

- A. 点 M 的轨迹确定的图形是平面图形
- B. 点 M 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}$
- C. C_1M 的最小值为 $\sqrt{2} - 1$
- D. 当点 M 在侧面 BB_1C_1C 上时, $\frac{\sqrt{3}}{3}AN + MN$ 的最小值为 1

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 2023 年 5 月湖南省部分高三学生参加高三第一次模拟大联考, 假如联考的数学

成绩服从正态分布, 其总体密度函数为: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-85)^2}{2\sigma^2}}$, 且 $P(70 \leq X \leq$

$100) = 0.7$. 若参加此次联考的学生共有 80000 人, 则数学成绩超过 100 分的人数大约为 _____.

14. 若函数 $f(x) = \lambda x^3 + (\lambda - 2)x^2 (x \in \mathbf{R})$ 是奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\lambda, f(\lambda))$ 处的切线方程为 _____.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 过点 $M(-1, 0)$ 且斜率为正的直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 且 $|FA| + |FB| = 10, E(5, 0)$. 若过点 E, F 的圆与直线 l 相切于第一象限的点 N , 则 $\angle ENF$ 的值为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = e^{a \sin x} - a \sin x$, 对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 2$, 则实数 a 的取值范围为 _____.

【高三数学 第 3 页(共 6 页)】

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ ，且满足 $3a_{n+1}-a_n=2 \times 3^{-n}$ 。

(1) 求证：数列 $\{3^n \cdot a_n\}$ 是等差数列；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=9^n \cdot a_n a_{n+1}$ ，求数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边，向量 $\mu=(c-2b, a)$ ， $\nu=(\cos A, \cos C)$ ，且 $\mu \perp \nu$ 。

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}=2$ ，求 $\triangle ABC$ 外接圆半径的最小值。

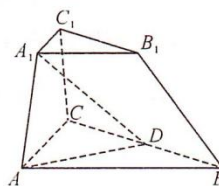
19. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中， $A_1B_1=2, AB=AC=4, AA_1=CC_1=\sqrt{5}, BB_1=3$ ，

$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ 。

(1) 证明：平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC ；

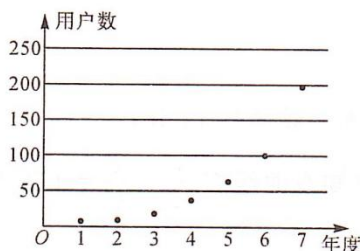
(2) 设 D 是 BC 的中点，求平面 A_1ACC_1 与平面 A_1AD 夹角的余弦值。



20. (本小题满分 12 分)

华为云服务是华为公司在 ICT 领域通过 30 多年的技术攻坚和经验积累,将产品解决方案开放给用户,为用户提供集个人数据同步、云相册、手机找回等多种基础云功能,旨在为消费者提供一站式易用、快捷、智能、安全的个人数据管理服务. 华为云服务采用按需使用、按需付费的一站式 IT 计算资源租用服务. 据调查,在某一地区自 2016 年至 2022 年以来,7 年的使用用户数如下表所示:(x 表示年度,2016 年度记为 1,2017 年度记为 2, ..., 依次类推,2022 年度记为 7; y 表示该年度使用的用户数,单位:千户).

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7	9	21	36	66	100	198



根据以上数据,绘制了如图所示的散点图.

- 根据散点图判断,在这 7 年内, $y=a+bx$ 与 $y=c \cdot d^x$ (c, d 均为大于零的常数)哪一个适宜作为该地区华为云用户数 y (千户)关于年度 x 的回归方程类型?(给出判断即可,不必说明理由);并根据表中数据,求 y 关于 x 的经验回归方程,估计 2023 年度用户数(保留到千户位);
- 该地区按用户使用华为云服务的时间,从高到低评为三个等级的星级,其中连续使用华为云 5 年以上的用户评为“五星用户”,三年以上五年以下的用户评为“三星用户”,其它用户评为“星级用户”,每位用户年服务费按星级从高到低依次为 50 元、70 元、90 元. 为了拓展用户数量,该地区今年推出一项用户星级升级的抽奖活动,每位用户可抽奖两次,每次抽奖有 $\frac{1}{4}$ 的概率升两级,有 $\frac{1}{2}$ 的概率升一级,还有 $\frac{1}{4}$ 的概率不升级,最高升为“五星用户”. 现某家庭有 2 位华为云用户,其中甲是“三星用户”,乙是“星级用户”,求今年该家庭支付华为云服务费的分布列与数学期望.

参考数据:

\bar{y}	\bar{x}	$\sum_{i=1}^7 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^7 x_i^2$	$10^{0.54}$
62.43	1.54	2548	50.12	3.47

【高三数学 第 5 页(共 6 页)】

其中 $z_i = \lg y_i$, $\bar{z} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 z_i$.

参考公式: 经验回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率与截距的最小二乘法估计公式分

别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一个焦点到其一条渐近线的距离等于其离心率.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 l 与椭圆 $\frac{y^2}{2} + x^2 = 1$ 相切, 且与双曲线 C 的左、右支分别交于 A, B 两点, 与双曲线 C 的渐近线分别交于 E, F 两点. $D(0, 2)$, O 为坐标原点, 记 $\triangle DAB, \triangle OEF$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 当 $\frac{7\sqrt{15}}{5} \cdot S_1 - S_2 = 4$ 时, 求直线 l 的方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = \frac{ax}{e^x}$, $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 分别是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数.

(1) 证明: 当 $a=1$ 时, 方程 $f'(x) = g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上有且仅有一个实数根;

(2) 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(x) > g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

