府谷中学高二年级第二学期第二次月考·数学试题(文科)

参考答案、提示及评分细则

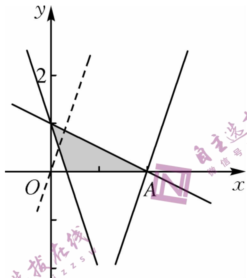
1. A　因为 $M=\{1,3,5,7,9\}$,$N=\{x\mid -2<x<5\}$,所以 $M\cap N=\{1,3\}$. 故选 A.

2. A　由 $(a+bi)(2+i)=2a+(a+2b)i-b=2a-b+(a+2b)i$,所以 $\begin{cases}2a-b=3,\\ a+2b=2,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{8}{5}$,$b=\frac{1}{5}$,所以 $a+b=\frac{8}{5}+\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$. 故选 A.

3. D　命题的否定是改变量词,否定结论,故"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2+x_0+1>0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1\leqslant 0$". 故选D.

4. A　由 $a_3+a_9+a_{15}=18$ 得 $a_9=6$,所以 $S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9=102$. 故选 A.

5. C　由题意作出可行域,如图所示.



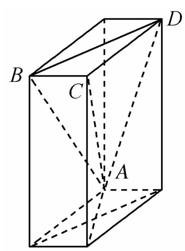
转化目标函数 $z=3x-y$ 为 $y=3x-z$,平移直线 $y=3x-z$,得当直线过点 $A(2,0)$时,直线在 y 轴上的截距最小,z 最大,所以 $z_{\max}=3\times2-0=6$. 故选 C.

6. A　$\frac{\sin 160^\circ\cos 20^\circ}{1-2\sin^2 25^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 50^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

7. B　函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在$[0,\pi]$上恰有 3 个零点,则 $3\pi\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{3}<4\pi$,解得$\frac{8}{3}\leqslant\omega<\frac{11}{3}$,因而整数 $\omega=3$. 故选 B.

8. D　由题意,半衰期所用时间为 50 天,即$\frac{1}{2}M_0=M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{h}}$,则 $h=50$,所以质量为 M_0 的锶 89 经过 30 天衰减后,质量大约为 $M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{50}}=M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6}=M_0\cdot\frac{1}{2^{0.6}}\approx M_0\times\frac{1}{1.516}=0.66M_0$. 故选 D.

9. C　由三视图可知,该几何体为如图所示三棱锥 $A-BCD$,则 $V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)\times3=1$. 故选 C.

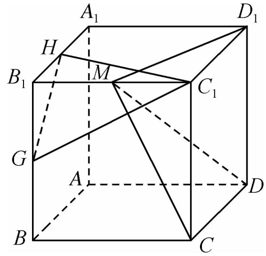


10. B　取 C 的一条渐近线方程为 $bx-ay=0$,所以$\left(\frac{|-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+(\sqrt{3})^2=4$,所以 $a^2=3b^2$,即 $a^2=3(c^2-a^2)$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

11. B　构造函数 $f(x)=\ln x+1-x$,$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以 $f\left(\frac{1}{98}\right)>f\left(\frac{1}{99}\right)>f\left(\frac{1}{100}\right)$,即 $a>b>c$. 故选 B.

12. C　取 BB_1 的中点 G,A_1B_1 的中点 H,连接 C_1H,HG,GC_1,D_1M,CM,如图所示.
因为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形,又点 M 是棱 B_1C_1 的中点,点 H 是 A_1B_1 的中点,易得 $HC_1\perp D_1M$.

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，所以 $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，又 $C_1H\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $DD_1\perp C_1H$，又 $DD_1\cap D_1M=D_1$，DD_1，$D_1M\subset$ 平面 DD_1M，所以 $C_1H\perp$ 平面 DD_1M，又 $MD\subset$ 平面 DD_1M，所以 $C_1H\perp MD$. 同理可得，$C_1G\perp MD$，又 $C_1G\cap C_1H=C_1$，C_1G，$C_1H\subset$ 平面 C_1GH，所以 $DM\perp$ 平面 C_1GH. 所以 P 点在正方体表面上运动所形成的轨迹为 $\triangle C_1HG$.



因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以 $HC_1=GC_1=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，所以 $\triangle C_1HG$ 的周长为 $GH+HC_1+GC_1=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{2}+2\sqrt{5}$. 故选 C.

13. $3\sqrt{2}$　由已知可得 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2(2,4)-(7,5)=(-3,3)$，所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

14. $\frac{\pi}{3}$　由题意得 $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}+\sqrt{3}$，所以 $f'(1)=3-3+\sqrt{3}=\sqrt{3}$，设直线 l 的倾斜角为 $\alpha(0\leqslant\alpha<\pi)$，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

15. $\frac{21}{5}$　法一：设等比数列的公比为 q，若 $q=1$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1}{5a_1}=2\neq5$，所以 $q\neq1$；由 $\frac{S_{10}}{S_5}=5$，得 $\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=5\times\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}$，即 $1-q^{10}=5(1-q^5)$，所以 $1+q^5=5$，解得 $q^5=4$，则 $\frac{S_{15}}{S_{10}}=\frac{\frac{a_1(1-q^{15})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}=\frac{1-q^{15}}{1-q^{10}}=\frac{1-(q^5)^3}{1-(q^5)^2}=\frac{1-4^3}{1-4^2}=\frac{1-64}{1-16}=\frac{21}{5}$.

法二：由等比数列的性质知 S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$，…成等比数列，其公比为 $\frac{S_{10}-S_5}{S_5}=\frac{S_{10}}{S_5}-1=4$，设 $S_5=t$，显然 $t\neq0$，则 $S_{10}=5t$，$S_{15}-S_{10}=t\cdot4^2=16t$，所以 $S_{15}=21t$，所以 $\frac{S_{15}}{S_{10}}=\frac{21}{5}$.

16. -1　因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=-f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=\log_2 a=0$，解得 $a=1$，即当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，$f(1)=\log_2 2=1$；因为 $y=f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$，即 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，又 $y=f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+1)=-f(x-1)$，则 $f(x+2)=-f(x)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即函数 $y=f(x)$ 是周期函数，周期为 4，则 $f(2\,022)+f(2\,023)=f(2)+f(3)=-f(0)-f(1)=-1$.

17. 解：(1) 因为 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C=a+c$，所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin A+\sin C$，…………………… 1 分

又 $A=\pi-(B+C)$，所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin(B+C)+\sin C$，…………………… 2 分

所以 $\sqrt{3}\sin B\sin C=\cos B\sin C+\sin C$，…………………… 3 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，…………………… 4 分

所以 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………… 6 分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$，所以 $ac=4$，…………………… 8 分

又 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac$，所以 $(a+c)^2=4+3ac=16$，…………………… 10 分

所以 $a+c=4$，与 $ac=4$ 联立，得 $a=c=2$. …………………… 12 分

18. 解：(1) 由图可知：$(0.005+0.015+0.030+0.055+a+0.120+0.160+0.030+0.005)\times2=1$，…… 1 分

解得 $a=0.080$，…………………… 2 分

该地区居民的月均用水量 $\bar{x}=1\times0.01+3\times0.03+5\times0.06+7\times0.11+9\times0.16+11\times0.24+13\times0.32+15\times0.06+17\times0.01=10.48$(吨)，即估计该地区居民的月均用水量为 10.48 吨. …………………… 4 分

(2) 月均用水量不低于 14 吨的用户的频率为：$2\times(0.030+0.005)=0.07$，…………………… 5 分

所以 $20\times0.07=1.4$(万户)，估计 20 万用户中月均用水量不低于 14 吨的用户数为 1.4 万户. ……… 7 分

(3) $[2,4)$ 的频率为 $0.015\times2=0.03$，有 $200\times0.03=6$(户)，

$[14,16)$ 的频率为 $0.030\times2=0.06$，有 $200\times0.06=12$(户)，共 18 户，

所以在 $[2,4)$ 组中抽取 $\frac{6}{18}\times6=2$(户)，记为 a_1，a_2，…………………… 8 分

在$[14,16)$组中抽取$\frac{12}{18}\times 6=4$(户),记为b_1,b_2,b_3,b_4, …… 9分

则从中抽取2户有(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_1,b_4),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_2,b_4),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_1,b_4),(b_2,b_3),(b_2,b_4),(b_3,b_4),共有15种基本事件, …… 10分

抽取的这2户居民来自不同组有(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_1,b_4),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_2,b_4),共8种, …… 11分

所以抽取的2户来自不同组的概率$P=\frac{8}{15}$. …… 12分

19.(1)证明:在菱形$ABCD$中,$\angle BAD=120^\circ$,

则$\triangle ABC$为等边三角形,又E为边BC的中点, …… 1分

所以$AE\perp EC$,$AE\perp B_1E$, …… 3分

而$EC\cap B_1E=E$,$EC,B_1E\subset$平面B_1EC,故$AE\perp$面B_1EC, …… 4分

又$AE\subset$面AB_1E,所以平面$AB_1E\perp$平面B_1EC. …… 6分

(2)解:设G是AB_1的中点,连结FG,EG,又F为B_1D的中点,

则$GF/\!/AD$且$GF=\frac{1}{2}AD$, …… 7分

而$EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$且$EC/\!/AD$,

所以$GF/\!/EC$且$GF=EC$,即四边形$FGEC$为平行四边形,故$CF/\!/EG$, …… 9分

所以AB_1与CF所成的角为$\angle AGE$或其补角. …… 10分

在$\triangle AEB_1$中,$GE=AG=B_1G$,所以$\angle AGE=120^\circ$,

故异面直线AB_1与CF所成的角为60°. …… 12分

20.解:(1)$f'(x)=x^2-2ax-3a^2=(x+a)(x-3a)$, …… 1分

①当$a=0$时,$f'(x)=x^2\geqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增; …… 2分

②当$a<0$时,令$f'(x)>0$,得$x>-a$,或$x<3a$,令$f'(x)<0$,得$3a<x<-a$,

所以$f(x)$在$(-\infty,3a)$,$(-a,+\infty)$上单调递增,在$(3a,-a)$上单调递减; …… 4分

③当$a>0$时,令$f'(x)>0$,得$x>3a$,或$x<-a$,令$f'(x)<0$,得$-a<x<3a$,

所以$f(x)$在$(-\infty,-a)$,$(3a,+\infty)$上单调递增,在$(-a,3a)$上单调递减. …… 6分

综上,当$a=0$时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增;当$a<0$时,$f(x)$在$(-\infty,3a)$,$(-a,+\infty)$上单调递增,在$(3a,-a)$上单调递减;当$a>0$时,$f(x)$在$(-\infty,-a)$,$(3a,+\infty)$上单调递增,在$(-a,3a)$上单调递减. …… 7分

(2)由(1)知$f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(3,+\infty)$上单调递增,在$(-1,3)$上单调递减, …… 8分

所以$f(x)_{极大值}=f(-1)=\frac{5}{3}$,$f(x)_{极小值}=f(3)=-9$, …… 9分

又$f(6)=\frac{1}{3}\times 6^3-6^2-3\times 6=18>0$,$f(-3)=\frac{1}{3}\times(-3)^3-(-3)^2-3\times(-3)=-9<0$, …… 10分

所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(-1,3)$,$(3,+\infty)$上各有一个零点,

故$f(x)$在$\mathbf{R}$上的零点个数为3个. …… 12分

21.解:(1)设E的方程为$mx^2+ny^2=1$,过$A(2,-1)$,$B\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

所以$\begin{cases}4m+n=1,\\ 2m+\frac{3}{2}n=1,\end{cases}$ …… 2分

解得$m=\frac{1}{8}$,$n=\frac{1}{2}$, …… 3分

所以E的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. …… 4分

(2)当直线l的斜率不存在时,易得直线l的方程为$x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$或$x=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

若直线 l 的方程为 $x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，则 $M\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$，$N\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$ 或 $M\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$，$N\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$，所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，所以$\angle MON=\frac{\pi}{2}$；

若直线 l 的方程为 $x=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$，则 $M\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$，$N\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$ 或$M\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$，$N\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$，所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，所以$\angle MON=\frac{\pi}{2}$. ………………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

因为直线 l 与圆 O：$x^2+y^2=\frac{8}{5}$ 相切，所以$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，即 $m^2=\frac{8}{5}(1+k^2)$. ………………… 8 分

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-8=0$，所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-8}{1+4k^2}$，……… 9 分

所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\frac{4m^2-8}{1+4k^2}+km\left(-\frac{8km}{1+4k^2}\right)+m^2$

$=\frac{5m^2-8k^2-8}{1+4k^2}=\frac{5\times\frac{8}{5}(1+k^2)-8k^2-8}{1+4k^2}=0$，所以$\angle MON=\frac{\pi}{2}$. ………………………… 11 分

综上，$\angle MON$ 为定值，该定值为$\frac{\pi}{2}$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入 l：$mx+y-2m=0$，得 $m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2m=0$，

所以直线 l 的极坐标方程为 $m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2m=0$，………………………… 2 分

由 $\rho=4(\sin\theta+\cos\theta)$，得 $\rho^2=4\rho(\sin\theta+\cos\theta)$，

又 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，

所以 $x^2+y^2-4x-4y=0$，即$(x-2)^2+(y-2)^2=8$，………………………… 4 分

所以圆 C 的一个参数方程为$\begin{cases}x=2+2\sqrt{2}\cos\varphi,\\ y=2+2\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数). ………………………… 5 分

(2)点 $C(2,2)$到直线 l 的距离 $d=\frac{|2m+2-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$，………………………… 7 分

则 $2\sqrt{8-\left(\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2}=2\sqrt{6}$，………………………… 8 分

所以$\frac{4}{m^2+1}=2$，即 $m=\pm1$. ………………………… 10 分

23. 解：(1)$f(x)\geqslant3$，即$|x^2-1|+|x-2|\geqslant3$.

当 $x<-1$ 时，$x^2-x+1\geqslant3$，解得 $x<-1$；………………………… 1 分

当$-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$3-x^2-x\geqslant3$，解得$-1\leqslant x\leqslant0$；………………………… 2 分

当 $1<x<2$，$x^2-x+1\geqslant3$，不等式无解；………………………… 3 分

当 $x\geqslant2$，$x^2+x-3\geqslant3$，解得 $x\geqslant2$. ………………………… 4 分

故不等式 $f(x)\geqslant3$ 的解集为$\{x|x\geqslant2$ 或 $x\leqslant0\}$. ………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=|x^2-1|+|x-2|\geqslant|x^2-1+x-2|=|x^2+x-3|$，

当且仅当$(x^2-1)(x-2)\geqslant0$ 时取等号，………………………… 6 分

所以 $f(a)\geqslant|a^2+a-3|$，当且仅当$(a^2-1)(a-2)\geqslant0$ 时取等号，

又 $f(a)\leqslant|a^2+a-3|$，所以 $f(a)=|a^2+a-3|$，且$(a^2-1)(a-2)\geqslant0$，………………………… 8 分

解得 $a\geqslant2$ 或$-1\leqslant a\leqslant1$，即实数 a 的取值范围$[-1,1]\cup[2,+\infty)$. ………………………… 10 分