文科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知复数 $z=\frac{1}{1+i^3}$，则 $|z|=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知集合 $A=\left\{x\left|x=\frac{1}{3}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x=\frac{4}{3}n-1,\ n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则

A. $A\cap B=A$　　B. $A\cap B=\varnothing$　　C. $A\cup B=A$　　D. $A\cup B=\mathbf{Z}$

3. 已知命题 p：函数 $y=a^{x-1}+2(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象恒过定点 $(1,3)$；命题 q：若直线 l 的倾斜角越大，则 l 的斜率就越大. 则下列命题中为真命题的是

A. $p\vee q$　　B. $p\wedge q$　　C. $\neg p\vee q$　　D. $\neg p\wedge q$

4. 已知 $\sin\theta-2\cos\theta=0$，则 $\frac{\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\theta}=$

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. -1

5. 某公司利用随机数表对生产的900支乙肝疫苗进行抽样测试，先将疫苗按000，001，…，899进行编号，从中抽取90个样本，若选定从第4行第4列的数开始向右读数，（下面摘取了随机数表中的第3行至第5行），根据下图，读出的第5个数的编号是

1676622766	5650267107	3290797853	1355385859	8897541410
1256859926	9696682731	0503729315	5712101421	8826498176
5559563564	3854824622	3162430990	0618443253	2383013030

A. 827　　B. 310　　C. 503　　D. 729

6. 为响应国家号召，大力发展三农产业，某农户在自家地块开起生态农家乐，如图1所示，建设了三个功能区，$\triangle ABC$ 为小型鱼塘养鱼供休闲垂钓，矩形 $BCMN$ 为果园种植区，以 CM 为直径的半圆区域为农家乐活动住宿区. 现农户欲对果园进行施肥，运来一批肥料放置于点 A 处，要把这批肥料沿鱼塘两侧的道路 AB，AC 送到矩形 $BCMN$ 的果园种植区去，若 $AB=CB=2\text{km}$，$AC=1\text{km}$，该农户在矩形 $BCMN$ 果园中画定了一条界线，使位于界线一侧的点沿道路 AB 运送肥料较近，而另一侧的点沿道路 AC 运送肥料较近，设这条界线是曲线 E 的一部分，则曲线 E 为

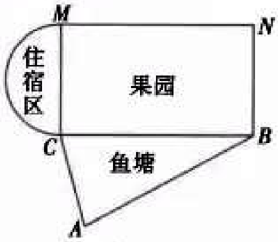

图1

A. 圆

B. 椭圆

C. 抛物线

D. 双曲线

7. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ -8x^2-x+1, & x\geq 0,\end{cases}$若$f(m)=f(2^m)$，则$f(m+1)=$

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. -2

8. 已知△ABC的外接圆圆心为O，$AB=\sqrt{6}$，$AC=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=$

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 9

9. 甲、乙、丙、丁四人随机地排成一行，则甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻的概率为

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 已知函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$上是增函数，且在$[0,4\pi]$上仅有一个极大值点，则$\omega$的取值范围为

A. $\left[\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right)$

11. 已知圆M：$x^2+y^2-6y+8=0$，以圆M的圆心为焦点F的抛物线E：$x^2=2py(p>0)$，过F的直线l与M交于A，B两点(A在B的上方)，l与E交于P，Q两点(P在Q的上方)，则$\frac{1}{4}|AP|+|BQ|$的最小值为

A. 7　　B. $\frac{25}{4}$　　C. 6　　D. $\frac{11}{2}$

12. 已知函数$f(x)=x\ln x+x^2-x$，若对任意$x\in(0,+\infty)$，都有$f(x)\geq ae^{-x}$，则实数a的取值范围为

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$　　D. $(-\infty,0]$

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知半径为1的圆C关于直线$2x-y-4=0$对称，写出圆C的一个标准方程________.

14. 已知函数$f(x)=\frac{\cos x}{x+1}$，则曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为________.

15. 在锐角△ABC中，a，b，c分别为角A，B，C的对边，满足$a\cos B-b=b\cos A$，且△ABC的面积S为$\frac{1}{4}$，则$(b+c+a)(b+c-a)$的取值范围为________.

16. 如图2，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M，N分别为棱B_1C_1，CD上的动点（包含端点），则下列说法正确的是________.

①当M为棱B_1C_1的中点时，则在棱CD上存在点N使得$MN\perp AC$；

②当M，N分别为棱B_1C_1，CD的中点时，则在正方体中存在棱与平面A_1MN平行；

③若M，N分别为棱B_1C_1，CD的中点时，则过A_1，M，N三点作正方体的截面，所得截面为四边形；

④若正方体的棱长为2，则三棱锥B_1-A_1MN的体积可能为1；

⑤直线MN与平面$ABCD$所成角的正切值的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

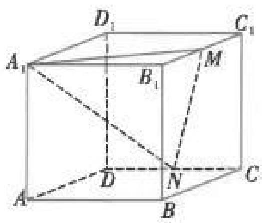

图2

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1a_2a_3=8$，试从下列两个条件：①$S_{2n}=3(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})(n\in\mathbf{N}^*)$，②$S_{n+m}=S_n+2^nS_m(n,\ m\in\mathbf{N}^*)$中选取一个条件解答下列问题：

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=(-1)^{n-1}(a_n+\log_2a_{2n})(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

18.（本小题满分 12 分）

近年来，由于耕地面积的紧张，化肥的施用量呈增加趋势. 一方面，化肥的施用对粮食增产增收起到了关键作用，另一方面，也成为环境污染、空气污染、土壤污染的重要来源之一. 如何合理地施用化肥，使其最大程度地促进粮食增产，减少对周围环境的污染成为需要解决的重要问题. 研究粮食产量与化肥施用量的关系，成为解决上述问题的前提. 某研究团队收集了 10 组化肥施用量和粮食亩产量的数据并对这些数据作了初步处理，得到了如图 3 所示的散点图及一些统计量的值. 化肥施用量为 x(单位：公斤)，粮食亩产量为 y(单位：百公斤).

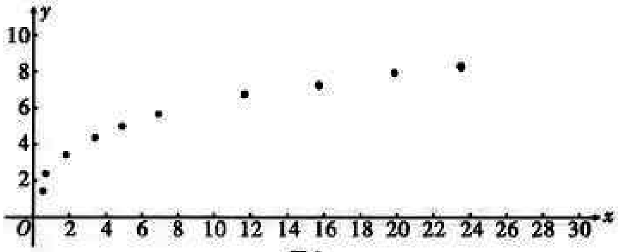

图 3

参考数据：

$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i$	$\sum_{i=1}^{10}x_i$	$\sum_{i=1}^{10}y_i$	$\sum_{i=1}^{10}x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10}t_iz_i$	$\sum_{i=1}^{10}t_i$	$\sum_{i=1}^{10}z_i$	$\sum_{i=1}^{10}t_i^2$
650	91.5	52.5	1478.6	30.5	15	15	46.5

表中 $t_i=\ln x_i$，$z_i=\ln y_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$.

（1）根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=cx^d$，哪一个适宜作为粮食亩产量 y 关于化肥施用量 x 的回归方程类型（给出判断即可，不必说明理由）；

（2）根据（1）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（3）根据（2）的回归方程，预测化肥施用量为 27 公斤时，粮食亩产量 y 的值.

附：①对于一组数据$(u_i,\ v_i)(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\beta}u+\hat{\alpha}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$；②取 $e\approx2.7$.

19.（本小题满分 12 分）

如图 4，O 是圆锥底面圆的圆心，圆锥的轴截面 PAB 为直角三角形，C 是底面圆周上异于 A，B 的任一点，D 是线段 AC 的中点，E 为母线 PA 上的一点，且 $PE=2EA$.

（1）证明：平面 $POD\perp$平面 PAC；

（2）若 $AC=2\sqrt{3}$，$BC=2$，求三棱锥 $P-ODE$ 的体积.

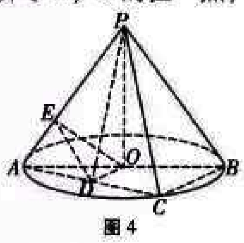

图 4

20.（本小题满分 12 分）

已知点 $A(0,-2)$，$B(0,2)$，动点 P 满足直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{2}{3}$. 记点 P 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的方程；

（2）过 x 轴上一点 $Q(\sqrt{2},0)$ 且不与坐标轴平行的直线与 C 交于 M，N 两点，线段 MN 的垂直平分线与 x 轴交于点 R，求 $\frac{|MN|}{|QR|}$.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=[x^2-(a+3)x+a+3]e^x-a+1$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值；

（2）若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点，证明：当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)>(1-a)(a^2-3a+4)(e^{a+1}-2)$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4–4：坐标系与参数方程】

心形线，是一个圆上的固定一点在它绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周滚动时所形成的轨迹，因其形状像心形而得名. 如图 5，在极坐标系中，方程 $\rho=a(1-\sin\theta)\ (a>0)$ 表示的曲线 C_1 就是一条心形线. 以极轴 Ox 所在的直线为 x 轴，极点 O 为坐标原点的直角坐标系 xOy 中，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi,\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），C_1 与 C_2 的其中一个交点 A（异于点 O）在 x 轴上.

（1）求 C_2 的极坐标方程及 a；

（2）已知曲线 C_3 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+4t,\\ y=\frac{3}{4}+3t,\end{cases}$（$t$ 为参数），C_1 与 C_3 相交于 E，O，F 三点，求 $|EF|$.

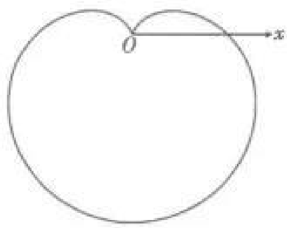

图 5

23.（本小题满分 10 分）【选修 4–5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|ax-1|$.

（1）若当 $x\in[1,2]$ 时，不等式 $f(x)\leqslant2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a=1$ 时，若 $|m|\geqslant1$，$|n|\geqslant1$，证明：$f(mn)\geqslant f(m)-f(n)$.

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	D	B	C	D	A	C	B	C	B	A	C

【解析】

1．$z=\dfrac{1}{1+i^3}=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，所以 $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选 D.

2．由于 $B=\left\{x\middle|x=\dfrac{4n-3}{3},\ n\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\middle|x=\dfrac{4(n-1)+1}{3},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$，任取 $x\in B$，则 $x=\dfrac{4(n-1)+1}{3}$

$=\dfrac{2\Gamma(2n-2)+1}{3}$，其中 $n\in\mathbf{Z}$，即 $x\in A$，所以 $B\subseteq A$，则有 $A\cup B=A$，故选 D.

3．令 $x-1=0$，即 $x=1$，所以 $y=3$，所以函数 $y=a^{x-1}+2$ 的图象恒过定点 $(1,\ 3)$，所以命题 p 为真命题；若直线 l 的倾斜角是 $45°$，则 l 的斜率为 1；若直线 l 的倾斜角是 $135°$，则 l 的斜率为 -1，不满足倾斜角越大，斜率就越大，所以命题 q 为假命题，所以 $p\vee q$ 为真命题，$p\wedge q$ 为假命题，$\neg p\vee q$ 为假命题，$\neg p\wedge q$ 为假命题，故选 B.

4．$\dfrac{\sin\theta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}=1+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{3}{2}$，故选 C.

5．从表中第 4 行第 4 列开始向右读取分别为 685，992（舍），696，966（舍），827，310，503，第 5 个数为 503，故选 D.

6．由题意，从点 A 出发经 C 到界线上一点 P，与从点 A 出发经 B 到 P，所走的路程是一样的，即 $|AC|+|PC|=|AB|+|PB|$，所以 $|PC|-|PB|=|AB|-|AC|$，又由 $AB=CB=2\text{km}$，$AC=1\text{km}$，所以 $|PC|-|PB|=1<|CB|$，根据双曲线的定义可知曲线 E 为双曲线的一部分，故选 A.

7．由题，$f(x)$ 的图象如图 1 所示，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上是增函数，在 $[0,\ +\infty)$ 上是减函数．由于 $f(m)=f(2^m)$，且对于任意 $m\in\mathbf{R}$ 都有 $m<2^m$，则有 $m<0$，所以 $2^m=-8\square(2^m)^2-2^m+1$，即

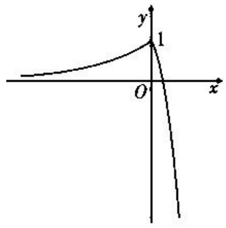

图 1

$8\cdot(2^m)^2+2\cdot2^m-1=0$，解得 $2^m=\frac{1}{4}$，所以 $m=-2$，则 $f(m+1)=f(-1)=\frac{1}{2}$，故选 C.

8、在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$. 如图 2 所示，连接 AO 并延长与圆 O 交于点 E，连接 EB，因为 O 是圆心，所以 $AB\perp EB$，则有 $|AE|\cos\angle OAB=2|AO|\cos\angle OAB=|AB|$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos\angle OAB=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=3$；同理可得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{3}{2}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=2$，故选 B.

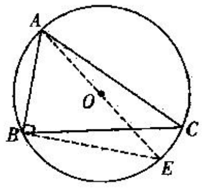

图 2

9．根据题意画图，如图 3，共有 24 种情况，其中甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻共有 4 种，所以甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻的概率为 $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，故选 C.

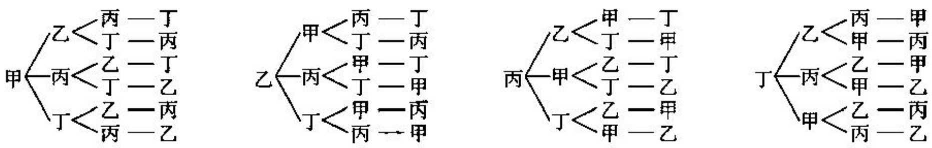

图 3

10. 由题 $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]$，所以有 $\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2\omega}$，得 $\omega\leqslant\frac{2}{3}$，又因为 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$；

又 $f(x)$ 在 $x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\ (k\in\mathbf{Z})$ 处取得极大值，可得 $0<\frac{\pi}{2\omega}\leqslant4\pi<\frac{5\pi}{2\omega}$，所以 $\frac{1}{8}\leqslant\omega<\frac{5}{8}$，

则 $\omega\in\left[\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right)$，故选 B.

11．如图 4，由题，可知 $F(0,3)$，圆 M 的半径为 1；设 $P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$，设直线 l_{PQ} 的方程为 $y=kx+3$，联立，得 $\begin{cases}x^2=12y,\\y=kx+3,\end{cases}$ 所以 $y^2-(6+12k^2)y+9=0$，且 $\Delta=(6+12k^2)^2-36\geqslant0$，所以 $y_P\cdot y_Q=9$. 又 $|AP|=|PF|-1=y_P+3-1=y_P+2$，$|BQ|=|QF|-1=y_Q+3-1=y_Q+2$，所以 $\frac{1}{4}|AP|+|BQ|=\frac{1}{4}(y_P+2)+(y_Q+2)=\frac{1}{4}y_P+y_Q+\frac{5}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{4}y_Py_Q}+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$（当且仅当

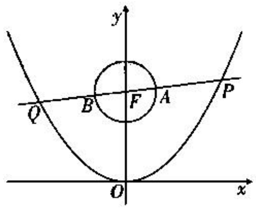

图 4

$y_P=4y_Q$时取等号），即当$y_P=6$，$y_Q=\frac{3}{2}$时，$\frac{1}{4}|AP|+|BQ|$的最小值为$\frac{11}{2}$，故选A.

12．由题，可得$a\leqslant xe^x(\ln x+x-1)$在$x\in(0,+\infty)$上恒成立；设$g(x)=xe^x(x>0)$，由于$g'(x)=(x+1)e^x>0$，所以$g(x)$在$x\in(0,+\infty)$上是增函数，则有当$x\in(0,+\infty)$时，$g(x)>0$.

令$t=xe^x(x>0)$，则有$t>0$，$\ln t=\ln x+x$，所以函数$y=xe^x(\ln x+x-1)=t(\ln t-1)(t>0)$；

由于$y'=\ln t-1+t\cdot\frac{1}{t}=\ln t$，当$0<t<1$时，$y'<0$，$y=t(\ln t-1)$在$t\in(0,1)$上是减函数；

当$t>1$时，$y'>0$，$y=t(\ln t-1)$在$t\in(1,+\infty)$上是增函数，所以当$t=1$时，$y_{\min}=-1$，则有$a\leqslant-1$，故$a\in(-\infty,-1]$，故选C.

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	$(x-2)^2+y^2=1$（答案不唯一，只要圆心C在直线$2x-y-4=0$上，半径为1，均可.）	$x+y-1=0$	$(1,\sqrt{3})$	①④⑤

【解析】

13．当圆心C为$(2,0)$，圆C的标准方程为$(x-2)^2+y^2=1$.（答案不唯一，只要圆心C在直线$2x-y-4=0$上，半径为1，均可.）

14．由题，得$f'(x)=\frac{-\sin x\cdot(x+1)-\cos x}{(x+1)^2}$，则$f'(0)=-1$，而$f(0)=1$，所以所求切线方程为$y-1=-x$，即$x+y-1=0$.

15．由正弦定理，得$\sin A\cos B=\sin B(1+\cos A)$，即$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B$，则$\sin(A-B)=\sin B$，因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$A-B=B$，即$A=2B$；由于$A=2B<\frac{\pi}{2}$，所以$B<\frac{\pi}{4}$；又$A+B=3B>\frac{\pi}{2}$，所以$B>\frac{\pi}{6}$，即$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$；又$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}$，所以$bc=\frac{1}{2\sin A}$；由于$(b+c+a)(b+c-a)=b^2+c^2-a^2+2bc=2bc(\cos A+1)=\frac{1}{\sin A}(\cos A+1)=\frac{1}{\tan B}$．因为$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan B<1$，所以$\frac{1}{\tan B}\in(1,\sqrt{3})$.

16. ①如图5，当N为CD的中点时，过M作$MM'\perp BC$于M'，所以$MM'\perp$平面$ABCD$，所以$MM'\perp AC$，又$MN\perp AC$，MN与MM'相交于M'，所以$AC\perp$平面$MM'N$，又$MN\subset$平面$MM'N$，所以$MN\perp AC$，故①正确；②在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，棱可分为三类，分别是与DA，DC，DD_1平行的棱，又DA，DC，DD_1不与平面A_1MN平行，所以在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，不存在棱与平面A_1MN平行，故②错误；③如图6，取BC中点M'，连接AM'，所以$AM'//A_1M$，过N作AM'的平行线交AD于点E，此时$DE=\frac{1}{4}DA$，所以$EN//A_1M$，即EN为过A_1，M，N三点的平面与平面$ABCD$的交线；连接A_1E，在BC上取点F，使得$CF=\frac{1}{4}CB$，所以$A_1E//B_1F$，再过点M作B_1F的平行线交CC_1于点G，此时$CG=\frac{1}{3}CC_1$，所以$A_1E//MG$，即MG为过A_1，M，N三点的平面与平面BCC_1B_1的交线；连接NG，则可得五边形A_1MGNE即为正方体中过A_1，M，N三点的截面，故③错误；④由等体积法得$V_{B_1-A_1MN}=V_{N-A_1B_1M}$，又$N$在运动过程中到平面$A_1B_1M$的距离始终为2，所以$V_{N-A_1B_1M}=\frac{1}{3}\Gamma 2\Gamma S_{\triangle A_1B_1M}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 2B_1M=\frac{2}{3}B_1M$，又$B_1M$的取值范围为$[0,\ 2]$，所以$V_{B_1-A_1MN}$的取值范围为$\left[0,\ \frac{4}{3}\right]$，所以三棱锥$B_1-A_1MN$的体积可能为1，故④正确；⑤设正方体棱长为2，如图7，过M作$MM'\perp BC$于M'，所以$MM'\perp$平面$ABCD$，所以MN与平面$ABCD$所成角即为$\angle MNM'$，所以$\tan\angle MNM'=\frac{MM'}{MN}=\frac{2}{MN}$；又$MN$长度的最大值为$2\sqrt{2}$，所以$MN$与平面$ABCD$所成角的正切值的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以⑤正确. 综上，答案为①④⑤.

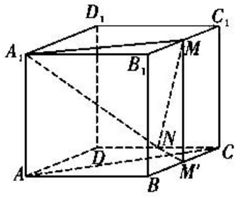

图5

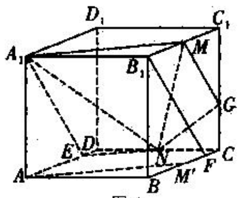

图6

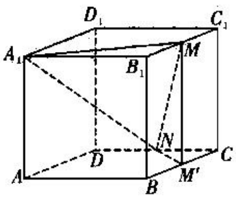

图7

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $a_1a_2a_3=8$，$\{a_n\}$ 是等比数列，

所以 $a_2^3=8$，解得 $a_2=2$．

选择条件①，由 $S_{2n}=3(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$，可得 $S_2=3a_1$，则 $a_2=2a_1$，

所以 $a_1=1$，公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，所以 $a_n=2^{n-1}$．

选择条件②，由 $S_{n+m}=S_n+2^nS_m$，可得 $S_2=a_1+2a_1$，则 $a_2=2a_1$，

所以 $a_1=1$，公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，所以 $a_n=2^{n-1}$． ……………………………………（6 分）

（2）$b_n=(-1)^{n-1}(a_n+\log_2 a_{2n})=(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)=(-2)^{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$，

所以 $T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=[(-2)^0+(-2)^1+\cdots+(-2)^{2n-1}]+$

$[(-1)^0\times 1+(-1)^1\times 3+\cdots+(-1)^{2n-2}\times(4n-3)+(-1)^{2n-1}\times(4n-1)]$

$=\dfrac{1-(-2)^{2n}}{1-(-2)}+[(1-3)+\cdots+(4n-3-4n+1)]=\dfrac{1-4^n}{3}-2n=\dfrac{1}{3}(1-4^n-6n)$．

……………………………………………………………………………（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）根据散点图可判断，$y=cx^d$ 更适合作为 y 关于 x 的回归方程类型．

………………………………………………………………………………（2 分）

（2）对 $y=cx^d$ 两边取对数，得 $\ln y=\ln c+d\ln x$，即 $z=\ln c+dt$，

由表中数据得：$\bar{z}=\bar{t}=1.5$，

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{10}t_iz_i-10\bar{t}\,\bar{z}}{\sum_{i=1}^{10}t_i^2-10\bar{t}^2}=\frac{30.5-10\times1.5\times1.5}{46.5-10\times1.5\times1.5}=\frac{1}{3},$$

$\ln c=\bar{z}-d\bar{t}=1.5-\dfrac{1}{3}\times1.5=1$，所以 $c=\mathrm{e}$，

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y=\mathrm{e}x^{\frac{1}{3}}$． ……………………………………………（10 分）

（3）当 $x=27$ 时，$y=\mathrm{e}\times 27^{\frac{1}{3}}=2.7\times 3=8.1$，

所以当化肥施用量为 27 公斤时，粮食亩产量约为 810 公斤. ……………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：由圆锥的性质可知，$PO\perp$ 底面圆，

又 AC 在底面圆 O 上，所以 $AC\perp PO$.

又因为 C 在圆 O 上，AB 为直径，所以 $AC\perp BC$，

又点 O，D 分别为 AB，AC 的中点，所以 $OD/\!/BC$，所以 $OD\perp AC$，

又 $OD\cap PO=O$，且 OD，$PO\subset$ 平面 POD，

所以 $AC\perp$ 平面 POD， ……………………………………（4 分）

又 $AC\subset$ 平面 PAC，

所以平面 $POD\perp$ 平面 PAC. ……………………………………（6 分）

（2）解：如图 8，在 PD 上取点 F，使得 $PF=2FD$，连接 EF，

由题知 $PE=2EA$，所以 $EF/\!/AC$，所以 $EF=\frac{2}{3}AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

又因为 $AC\perp$ 平面 POD，所以 $EF\perp$ 平面 POD，所以 EF 为三棱锥 $E-POD$ 的高.

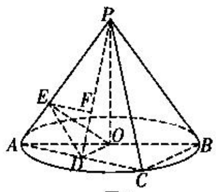

图 8

……………………………………………………………………（9 分）

又 $AC=2\sqrt{3}$，$BC=2$，所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=4$，

又因为 $\triangle PAB$ 为直角三角形，所以 $PO=\frac{1}{2}AB=2$.

又 $PO\perp OD$，所以 $S_{\triangle POD}=\frac{1}{2}\cdot PO\cdot OD=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，

所以 $V_{P-ODE}=V_{E-POD}=\frac{1}{3}\cdot EF\cdot S_{\triangle POD}=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 1=\frac{2\sqrt{3}}{9}$. ……………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）设点 $P(x,\ y)$，则直线 PA，PB 的斜率之积为 $\frac{y+2}{x}\cdot\frac{y-2}{x}=-\frac{2}{3}(y\neq\pm 2)$，

整理得 $2x^2+3y^2=12$，即 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1(y\neq\pm 2)$，

因此，点 P 的轨迹曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1(y\neq\pm 2)$. ……………………（4 分）

（2）设直线l_{MN}：$x=my+\sqrt{2}$ $(m\neq0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x=my+\sqrt{2},\\2x^2+3y^2-12=0.\end{cases}$得$(2m^2+3)y^2+4\sqrt{2}my-8=0$，

则当$\Delta=96(m^2+1)>0$时，$y_1+y_2=\dfrac{-4\sqrt{2}m}{2m^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{-8}{2m^2+3}$，

所以$|MN|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{\sqrt{96(1+m^2)}}{2m^2+3}=\dfrac{4\sqrt{6}(1+m^2)}{2m^2+3}$.……………………………………（9分）

又线段MN的中点为$\left(\dfrac{-2\sqrt{2}m^2}{2m^2+3}+\sqrt{2},\ \dfrac{-2\sqrt{2}m}{2m^2+3}\right)$，即$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2m^2+3},\ \dfrac{-2\sqrt{2}m}{2m^2+3}\right)$，

所以线段MN的垂直平分线的方程为$y-\dfrac{-2\sqrt{2}m}{2m^2+3}=-m\left(x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2m^2+3}\right)$，

令$y=0$，得$x_R=\dfrac{\sqrt{2}}{2m^2+3}$，所以$R\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2m^2+3},\ 0\right)$.

所以$\dfrac{|MN|}{|QR|}=\dfrac{\dfrac{4\sqrt{6}(1+m^2)}{2m^2+3}}{\left|\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2m^2+3}\right|}=2\sqrt{3}$.……………………………………………………（12分）

21.（本小题满分12分）

解：（1）由题，可知，$f(x)$的定义域为$x\in\mathbf{R}$，

$f'(x)=[x^2-(a+3)x+a+3+2x-(a+3)]e^x=x[x-(a+1)]e^x$，

令$f'(x)=0$得$x=0$或$x=a+1$.

①当$a=-1$时，$f'(x)\geqslant0$，则$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，无极值.

②当$a<-1$时，则有当$x<a+1$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(-\infty,\ a+1)$上单调递增；

当$a+1<x<0$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(a+1,\ 0)$上单调递减；

当$x>0$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增；

所以$f(x)$的极大值为$f(a+1)=(1-a)(e^{a+1}+1)$，$f(x)$的极小值为$f(0)=4$.

③当$a>-1$时，则有当$x<0$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(-\infty,\ 0)$上单调递增；

当$0<x<a+1$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(0,\ a+1)$上单调递减；

当$x>a+1$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(a+1,\ +\infty)$上单调递增；

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(0)=4$，$f(x)$ 的极小值为 $f(a+1)=(1-a)(e^{a+1}+1)$.

综上，得当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 无极值；

当 $a<-1$ 时，$f(x)_{极大值}=f(a+1)=(1-a)(e^{a+1}+1)$，$f(x)_{极小值}=f(0)=4$；

当 $a>-1$ 时，$f(x)_{极大值}=f(0)=4$，$f(x)_{极小值}=f(a+1)=(1-a)(e^{a+1}+1)$. …………（6 分）

（2）证明：由于 $f(0)=4>0$，且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 1-a$，

又函数 $f(x)$ 有三个不同的零点，

则由（1）可知 $\begin{cases} a>-1, \\ 1-a<0, \\ f(a+1)=(1-a)(e^{a+1}+1)<0, \end{cases}$ 所以 $a>1$.

此时 $x\geqslant 0$，则 $f(x)_{\min}=f(a+1)=(1-a)(e^{a+1}+1)$，即 $f(x)\geqslant(1-a)(e^{a+1}+1)$，

所以要证 $f(x)>(1-a)(a^2-3a+4)(e^{a+1}-2)$，

只需证 $(1-a)(e^{a+1}+1)>(1-a)(a^2-3a+4)(e^{a+1}-2)$ 在 $a\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

由于 $1-a<0$，即证 $e^{a+1}+1<(a^2-3a+4)(e^{a+1}-2)$，

即证 $\dfrac{2a^2-6a+9}{a^2-3a+3}<e^{a+1}$，即证 $e^{a+1}-\dfrac{3}{a^2-3a+3}-2>0$.

设 $g(a)=e^{a+1}-\dfrac{3}{a^2-3a+3}-2$ $(a>1)$，所以 $g'(a)=e^{a+1}+\dfrac{3(2a-3)}{(a^2-3a+3)^2}$；

设 $h(a)=\dfrac{2a-3}{(a^2-3a+3)^2}$ $(a>1)$，所以 $h'(a)=\dfrac{-6(a-1)(a-2)}{(a^2-3a+3)^3}$，

则有当 $1<a<2$ 时，$h'(a)>0$，则 $h(a)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增；

当 $a>2$ 时，$h'(a)<0$，则 $h(a)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减；

又 $h(1)=-1$，且当 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$h(a)\geqslant 0$，所以当 $a>1$ 时，$h(a)>-1$.

由于当 $a>1$ 时，$e^{a+1}>e^2>3$，所以 $g'(a)=e^{a+1}+3h(a)>0$，

则有 $g(a)$ 在 $a\in(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(a)>g(1)=e^2-5>0$，

故不等式 $e^{a+1}-\dfrac{3}{a^2-3a+3}-2>0$ 成立，

所以当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)>(1-a)(a^2-3a+4)(e^{a+1}-2)$. …………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）消去曲线C_2参数方程中的φ，可得$(x+2)^2+y^2=4$；

又由$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，所以曲线C_2的极坐标方程为$\rho=-4\cos\theta$；

…………………………………………………………………………（3 分）

由于曲线C_2与x轴的其中一个交点A（异于点O）的极坐标为$(4,\ \pi)$，

所以$4=a(1-\sin\pi)$，即$a=4$．　　……………………………………………（5 分）

（2）消去曲线C_3参数方程中的t，可得$y=\frac{3}{4}x$；

设直线$y=\frac{3}{4}x$的倾斜角为α，则有$\tan\alpha=\frac{3}{4}$且$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，

所以曲线C_3的极坐标方程为$\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$．

由$\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=4(1-\sin\theta),\end{cases}$得$|OE|=|\rho_E|=4(1-\sin\alpha)>0$，$|OF|=|\rho_F|=4(1+\sin\alpha)>0$，

所以$|EF|=|OE|+|OF|=4(1-\sin\alpha)+4(1+\sin\alpha)=8$．　　…………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

（1）解：由题，可得$\begin{cases}f(1)\leqslant 2,\\ f(2)\leqslant 2,\end{cases}$则有$\begin{cases}|a-1|\leqslant 2,\\ |2a-1|\leqslant 2,\end{cases}$

所以$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，即$a\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]$．　　……………………………………（5 分）

（2）证明：由绝对值三角不等式，可得

$f(m)-f(n)=|m-1|-|n-1|\leqslant|(m-1)-(n-1)|=|m-n|$；

由于$(mn-1)^2-(m-n)^2=m^2n^2+1-m^2-n^2=(m^2-1)(n^2-1)$，

又$|m|\geqslant 1$，$|n|\geqslant 1$，即$m^2\geqslant 1$且$n^2\geqslant 1$，所以$(m^2-1)(n^2-1)\geqslant 0$，

因此$|mn-1|\geqslant|m-n|$，又$f(mn)=|mn-1|$，

于是$f(mn)\geqslant|m-n|\geqslant f(m)-f(n)$．　　……………………………………（10 分）