2023—2024学年度高三一轮复习摸底测试卷
数学(三)

本试卷共4页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $\overline{z}\cdot(2-\mathrm{i})=6-\mathrm{i}$,则 $z=$

A. $\frac{13}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$　B. $\frac{11}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$　C. $\frac{13}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$　D. $13+4\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{x|\log_2(x+a)<2\}$,$B=\{x||x|\geqslant 1\}$,若 $A\cup B=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是

A. $(1,3)$　B. $[1,3]$
C. $[0,2]$　D. $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

3. 佛兰德现代艺术中心是比利时洛默尔市的地标性建筑,该建筑是一座全玻璃建筑,整体成圆锥形,它利用现代设计手法令空间与其展示的艺术品无缝交融,形成一个统一的整体,气势恢宏,美轮美奂.佛兰德现代艺术中心的底面直径为8 m,侧面积为 $8\pi\sqrt{229}\ \mathrm{m}^2$,则该建筑的高为

A. 26 m　B. 28 m
C. 30 m　D. 36 m

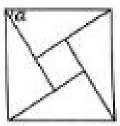
4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}}$,则 $f(x)$ 的单调递增区间是

A. $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$　B. $\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$
C. $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$　D. $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左焦点为 F,过原点 O 的直线与 C 的右支交于点 A,若 $\triangle OAF$ 为等腰三角形,则点 A 到 x 轴的距离为

A. $\frac{9}{5}$　B. $\frac{12}{5}$　C. 3　D. 5

6. 我国古代数学家赵爽在注解《周髀算经》一书时介绍了"赵爽弦图",如图所示,它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形,记直角三角形中较大的锐角为 α,大正方形的边长为 a,小正方形的边长为 b,若 $\frac{\sin\alpha(1-\sin 2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{2}{5}$,则 $\frac{b}{a}=$



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

7. 现有同副牌中的5张数字不同的扑克牌，其中红桃1张、黑桃2张、梅花2张，从中任取一张，看后放回，再任取一张. 甲表示事件“第一次取得黑桃扑克牌”，乙表示事件“第二次取得梅花扑克牌”，丙表示事件“两次取得相同花色的扑克牌”，丁表示事件“两次取得不同花色的扑克牌”，则

A. 乙与丙相互独立　　B. 乙与丁相互独立

C. 甲与丙相互独立　　D. 甲与乙相互独立

8. 若函数 $f(x)=(2-m)x-\ln x-m$ 有两个零点，则实数 m 的取值范围是

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(-\infty,3)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其平均数、中位数、标准差、极差分别记为 a_1,b_1,c_1,d_1. 由这组数据得到新样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中 $y_i=2x_i+2\,024(i=1,2,\cdots,n)$，其平均数、中位数、标准差、极差分别记为 a_2,b_2,c_2,d_2，则

A. $a_2=2a_1+2\,024$　　B. $b_2=b_1$　　C. $c_2=4c_1$　　D. $d_2=2d_1$

10. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\alpha,-\sin\alpha)$，$\boldsymbol{n}=(\cos\beta,\sin\beta)$，则

A. $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\cos(\alpha+\beta)$　　B. $\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2=2$

C. 若 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $\alpha+\beta=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　D. $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|\leqslant 2$

11. 点 P 是直线 $l:x+y=3$ 上的一个动点，A,B 是圆 $O:x^2+y^2=1$ 上的两个动点，则

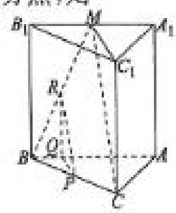
A. 点 A 到直线 l 的距离大于 $\frac{3}{2}$

B. 点 A 到直线 l 的距离小于 $\frac{7}{2}$

C. 存在点 P,A,B，使得 $\angle APB=90^\circ$

D. 若直线 PA,PB 均与圆 O 相切，则直线 AB 过定点 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

12. 如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长均为1，点 P 是棱 BC 的中点，点 M 满足 $\overrightarrow{B_1M}=\lambda\overrightarrow{B_1A_1}(\lambda\in[0,1])$，点 R 为 BM 的中点，点 Q 是棱 AB 上靠近点 B 的四等分点，则



A. 三棱锥 $B-C_1AM$ 的体积为定值

B. C_1M+BM 的最小值为 $\sqrt{3}+1$

C. $CM/\!/$平面 PQR

D. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，过点 P,A,R 的平面截正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 所得图形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数 $f(x)=x^2-mx+4$ 是定义在区间 $[-2-n,2n]$ 上的偶函数，则 $m+n=$________.

14. 抛物线 $C_1:y=-4x^2$ 绕其顶点顺时针旋转 90° 后得到抛物线 C_2，则 C_2 的准线方程为________.

15. 函数 $f(x)=|3x-2|-3\ln(2x)$ 的最小值为________.

16. 欧拉是18世纪最优秀的数学家之一，几乎每个数学领域都可以看到欧拉的名字，例如初等几何中的欧拉线、多面体中的欧拉定理、微分方程中的欧拉方程，以及数论中的欧拉函数等等. 若正整数 m,n 只有1为公约数，则称 m,n 互质，欧拉函数是指：对于一个正整数 n，小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的正整数(包括1)的个数，记作 $\varphi(n)$，例如：小于或等于4的正整数中与4互质的正整数有1，3这两个，即 $\varphi(4)=2$. 记 S_n 为数列 $\{\varphi(4^n)\}$ 的前 n 项和，则 $S_5=$________；记数列 $\left\{\frac{n}{\varphi(4^n)}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $T_n=$________.(本题第一空2分，第二空3分)

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分10分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=20$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, n\text{为奇数},\\ a_n-2, n\text{为偶数}.\end{cases}$

（1）记$b_n=a_{2n}$，求出b_1，b_2及数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n\}$的前200项和.

18.（本小题满分12分）

如图1，在矩形$ABCD$中，$AD=1$，$CD=\lambda AD(\lambda>0)$，延长BA到点M，且$MA=1$. 现将$\triangle MAD$沿着AD折起，到达$\triangle PAD$的位置，使得$PA\perp AB$，如图2所示. 过棱PD的中点E作$EF\perp PC$于点F.

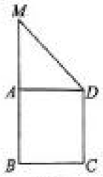


图1

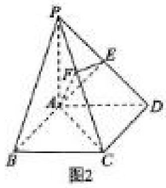


图2

（1）若$AB=AD$，求线段AF的长；

（2）若平面AEF与平面$ABCD$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$，求λ的值.

19.（本小题满分12分）

从①$b^2+c^2-a^2=2bc\cos B(1-2\cos C)$；②$c^2=b^2+ab$；③$\frac{\sin C\cos B-\sin B\cos C}{\sin B}=\frac{\cos(C-B)}{\cos B}$，这三个条件中任选一个，补充在下面的横线上并解答问题.

在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且________.

（1）证明：$C=2B$；

（2）求$\frac{2\cos B}{\sin C}+4\sin B$的取值范围.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20.(本小题满分 12 分)

第 22 届亚运会于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在我国杭州举行,这是我国继北京亚运会后第二次举办亚运会.为迎接这场体育盛会,杭州市某社区决定举办一次亚运会知识竞赛,要求每组参赛队伍由两人组成,竞赛分为预赛和决赛,其中预赛规则如下:

①每组队伍先从 A,B 两类问题中选择一类,并由两位选手从中各随机抽取一个问题回答,答错的选手本轮竞赛结束;答对的选手再从另一类问题中随机抽取一个问题进行回答,无论答对与否,本轮竞赛结束;

②若在本轮竞赛中每组队伍的两名选手合计答对问题的个数不少于 3 个,则可进入决赛.

市民甲与乙组成"梦幻"队参加了这次竞赛,已知甲答对 A 类中每个问题的概率均为0.7,答对 B 类中每个问题的概率均为 0.5,乙答对 A 类中每个问题的概率均为 0.4,答对 B 类中每个问题的概率均为 0.8.

(1)若"梦幻"队先回答 A 类问题,记 X 为"梦幻"队答对问题的个数,求 X 的分布列及数学期望;

(2)为使"梦幻"队进入决赛的概率最大,"梦幻"队应选择先回答哪类问题?并说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

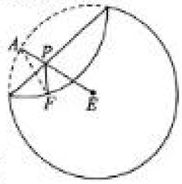
"工艺折纸"是一种把纸张折成各种不同形状物品的艺术活动,在我国源远流长.某些折纸活动蕴含丰富的数学内容,例如:用一张圆形纸片,按如下步骤折纸(如图):

步骤 1:设圆心是 E,在圆内异于圆心处取一定点,记为 F;

步骤 2:把纸片折叠,使圆周正好通过点 F(即折叠后图中的点 A 与点 F 重合);

步骤 3:把纸片展开,并留下一道折痕,记折痕与 AE 的交点为 P;

步骤 4:不停重复步骤 2 和 3,就能得到越来越多的折痕.



现取半径为 4 的圆形纸片,设点 F 到圆心 E 的距离为 2,按上述方法折纸.以线段 EF 的中点为原点,线段 EF 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系 xOy,记动点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程;

(2)直线 $x=1$ 与 C 在第一象限内交于点 B,直线 $l:y=\frac{1}{2}x+m$ 与 C 交于 M,N 两点(均异于点 B),则直线 BM,BN 的斜率之和是否为定值?若为定值,求出该定值;若不为定值,请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=mx-\frac{\ln x}{m}(m\neq 0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)设 $m=1$,若正数 x_1,x_2 满足 $f(e^{x_1})>f(x_2)$,求证:$e^{x_1}+x_2>2$.