丹东市2023届高三总复习质量测试（二）

数学小题详解

1．已知向量 $a=(2,1)$，$b=(3,2)$，则 $a\cdot(a-b)=$

A．-5　　B．-3　　C．3　　D．5

答案：B．

解：

$a\cdot(a-b)=(2,1)\cdot(-1,-1)=2\times(-1)+1\times(-1)=-3$．

2．不等式 $\dfrac{3}{x+2}>1$ 的解集为

A．$\{x|x<1,\ x\neq-2\}$　　B．$\{x|x>1\}$

C．$\{x|-2<x<1\}$　　D．$\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$

答案：C．

解：

不等式 $\dfrac{3}{x+2}>1$ 等价于 $\dfrac{x-1}{x+2}<0$，等价于 $(x-1)(x+2)<0$，解集为 $\{x|-2<x<1\}$．

3．直线 $x+ay-3=0$ 与直线 $(a+1)x+2y-6=0$ 平行，则 $a=$

A．-2　　B．1　　C．-2 或 1　　D．-1 或 2

答案：A．

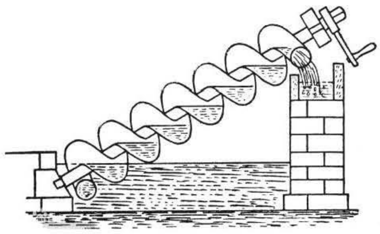
解：

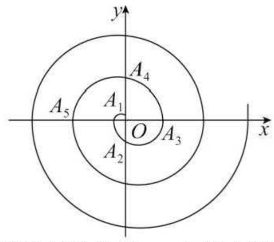
由 $1\times2=a(a+1)$，得 $a=-2$ 或 $a=1$．

当 $a=-2$ 时，l_1：$x-2y-3=0$，l_2：$-x+2y-6=0$，$l_1/\!/l_2$．

当 $a=1$ 时，l_1：$x+y-3=0$，l_2：$x+y-3=0$，l_1 与 l_2 重合．

4．古希腊科学家阿基米德发明了享誉世界的汲水器，称为阿基米德螺旋泵，两千多年后的今天，左图所示的螺旋泵，仍在现代工农业生产中使用，其依据是“阿基米德螺线”．





在右图所示的平面直角坐标系 xOy 中，点 A 匀速离开坐标系原点 O，同时又以固定的角速度绕坐标系原点 O 逆时针转动，产生的轨迹就是“阿基米德螺线”，该阿基米德螺线与坐标轴交点依次为 $A_1(-1,0)$，$A_2(0,-2)$，$A_3(3,0)$，$A_4(0,4)$，$A_5(-5,0)$，…按此规律继续，若四边形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ 的面积为220，则 $n=$

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

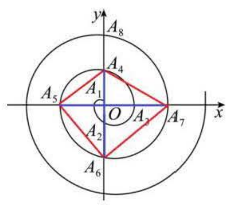
答案：C．

解：

如图，凸四边形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ 对角线垂直，故其面积等于

$$\frac{1}{2}(n+n+2)(n+1+n+3)=2(n+1)(n+2).$$

由 $2(n+1)(n+2)=220$ 得 $n=-12$，或 $n=9$，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=9$．



5．$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，$A=60^\circ$，则 $\cos B=$

A．$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\pm\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

答案：D．

解：

由正弦定理$\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin B}$，得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $BC>AB$，所以 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6．设函数 $f(x)$满足 $f(x+1)+f(x)=0$，当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=2^{1-x}$，则 $f(\log_{0.5}8)=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

答案：A．

解：

由 $f(x+1)+f(x)=0$ 得 $f(x+2)=f(x)$．因为$\log_{0.5}8=-\log_2 8=-3$，所以 $f(\log_{0.5}8)=f(-3)=f(-3+2+2)=f(1)=-f(0)=-2$，选 A．

7．若 $\cos\alpha\neq 0$，$2(\sin 2\alpha+\sqrt{5}\cos\alpha)=1+\cos 2\alpha$，则 $\tan 2\alpha=$

A．$-\dfrac{4}{3}$　　B．$-\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{4}{3}$

答案：D．

解法 1：

由 $2(\sin 2\alpha+\sqrt{5}\cos\alpha)=1+\cos 2\alpha$，得 $2\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha+2\sqrt{5}\cos\alpha$．

因为 $\cos\alpha\neq 0$，所以$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\alpha-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha=1$，于是 $\cos(\alpha+\varphi)=1$，$\tan\varphi=2$．

取 $\alpha=-\varphi$，得 $\tan\alpha=-2$，从而 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$.

解法 2：

由 $2(\sin 2\alpha+\sqrt{5}\cos\alpha)=1+\cos 2\alpha$，得 $2\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha+2\sqrt{5}\cos\alpha$．

因为 $\cos\alpha\neq 0$，所以 $\cos\alpha-2\sin\alpha=\sqrt{5}$，设 $f(x)=\cos x-2\sin x$，则 $x=\alpha$ 是 $f(x)$的极大值点，因此 $f'(\alpha)=0$．得 $\tan\alpha=-2$，从而 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$.

8．设函数 $y=f(x)$由关系式 $x|x|+y|y|=1$ 确定，函数 $g(x)=\begin{cases}-f(x), & x\geqslant 0,\\ f(-x), & x<0.\end{cases}$ 则

A．$g(x)$为增函数　　B．$g(x)$为奇函数

C．$g(x)$值域为$[-1,+\infty)$　　D．函数 $y=f(-x)-g(x)$没有正零点

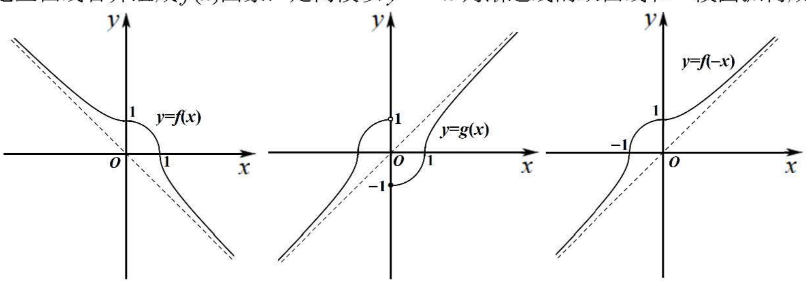
答案：D．

解：

可知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x^2}, & x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\sqrt{x^2-1}, & x>1.\end{cases}$　画以下曲线：

$y^2-x^2=1(x<0,\ y>0)$，$x^2+y^2=1(x>0,\ y>0)$，$x^2-y^2=1(x>0,\ y<0)$.

这些曲线合并组成 $f(x)$图象，是两段以 $y=-x$ 为渐近线的双曲线和一段圆弧构成．



因为 $g(x)=\begin{cases}-f(x), & x\geq 0,\\ f(-x), & x<0.\end{cases}$ 作 $f(x)$ 图象在轴右侧部分包括点(0，−1)关于 x 轴对称，得到曲线 C_1，再作 C_1 关于坐标原点对称，去掉点(0，1)得到曲线 C_2，C_1 与 C_2 合并组成 $g(x)$ 图象.

由 $g(x)$ 图象可知，$g(x)$ 不是奇函数，$g(x)$ 不是增函数，$g(x)$ 值域为 $\mathbf{R}$. 当 $x>0$ 时，$f(-x)$ 图象与 $g(x)$ 图象没有公共点，从而函数 $y=f(-x)-g(x)$ 没有正零点.

9．在复平面内，O 为坐标原点，A 为 $z=1-\mathrm{i}$ 对应的点，则

A．z 的虚部为 $-\mathrm{i}$　　B．z^6 为纯虚数

C．$\left|\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{z}\right|=\sqrt{2}$　　D．$\overrightarrow{OA}^2=z^2$

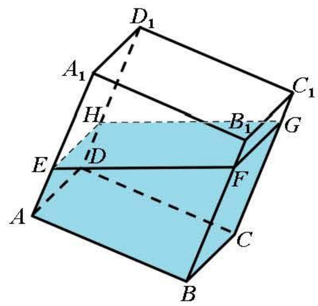
答案：BC．

解：

z 的虚部为 -1，选项 A 错误．$z^6=(z^2)^3=(-2\mathrm{i})^3=8\mathrm{i}$，是纯虚数，选项 B 正确．

$\left|\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{z}\right|=\dfrac{|-1+\sqrt{3}\mathrm{i}|}{|z|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，选项 C 正确．$\overrightarrow{OA}^2=|z|^2=2$，$z^2=-2\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OA}^2\neq z^2$，选项 D 错误.

10．如图，玻璃制成的长方体容器 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内部灌进一多半水后封闭，仅让底面棱 BC 位于水平地面上，将容器以 BC 为轴进行旋转，水面形成四边形 $EFGH$，忽略容器壁厚，则



A．A_1D_1 始终与水面 $EFGH$ 平行

B．四边形 $EFGH$ 面积不变

C．有水部分组成的几何体不可能是三棱柱

D．$AE+BF$ 为定值

答案：AC．

解：

可知 $BC\parallel$ 水面 $EFGH$，因为 $A_1D_1\parallel BC$，所以 A_1D_1 始终与水面平行，选项 A 正确．

$EH=FG$，EF 改变，水面所在四边形 $EFGH$ 面积改变，选项 B 错误．

有水部分组成的几何体为棱柱，因为水的体积大于一半容器容积，所以不可能是三棱柱，选项 C 正确．

有水部分的棱柱体积不变，高 BC 也不变，所以底面面积不变，所以当且仅当 E，F 分别在棱 AA_1，BB_1 上时，$AE+BF$ 是定值（反例可否定），选项 D 错误．

11．设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$ 为抛物线 C：$x^2=4y$ 上两点，F 为 C 的焦点，直线 MN 经过点 $D(0，6)$，则

A．若 $|MF|=3$，则 $|NF|=19$　　B．C 在点 M 处的切线经过点 $(\dfrac{x_1}{2}，0)$

C．$\angle MFN$ 为钝角　　D．若 $|DM||DN|=48$，则 $|x_1+x_2|=4$

答案：ABD．

解：

MN 不垂直于 x 轴，可设 $y=kx+6$，联立 $x^2=4y$ 得 $x^2-4kx-24=0$，$\triangle=16k^2+96>0$，所以 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-24$．

因为 $F(0，1)$，若 $|MF|=3$，则 $y_1=2$，而 $y_1y_2=\dfrac{x_1^2}{4}\cdot\dfrac{x_2^2}{4}=\dfrac{(x_1x_2)^2}{16}=36$，故 $y_2=18$，$|NF|=19$，选项 A 正确．

由 $y'=\frac{x}{2}$ 知 C 在点 M 处的切线方程为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{2}(x-\frac{x_1}{2})$，经过点 $(\frac{x_1}{2}, 0)$，选项 B 正确．

由 $F(0, 1)$ 得 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=x_1x_2+(kx_1+5)(kx_2+5)=(k^2+1)x_1x_2+5k(x_1+x_2)+25=1-4k^2$，而 M，N，F 不共线，当 $|k|<\frac{1}{2}$ 时，$\angle MFN$ 为锐角，当 $|k|=\frac{1}{2}$ 时，$\angle MFN$ 为直角，当 $|k|>\frac{1}{2}$ 时，$\angle MFN$ 为钝角，选项 C 错误．

$|DM||DN|=-\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=-x_1x_2-(y_1-6)(y_2-6)=-(k^2+1)x_1x_2=24(k^2+1)$．
由 $24(k^2+1)=48$，得 $k=\pm1$，即 $x_1+x_2=\pm4$，选项 D 正确．

12．函数 $f(x)=x^3+ax^2+9x+1$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)\geqslant f'(2)$，则

A．$f(0.56)+f(3.43)>6$　　B．$f(\ln10)>f(3-\ln2)$

C．$f(\frac{3}{\pi})<f(2-\frac{3}{\pi})$　　D．$f(2+\sqrt{3})<f(\frac{e}{10})$

答案：BCD．

解：

由 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$．可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增，在 $(1, 3)$ 单调递减，在 $(3, +\infty)$ 单调递增，且 $f(x)$ 图象关于点 $(2, 3)$ 中心对称．

由对称性得 $f(0.56)=6-f(3.44)$，从而 $f(0.56)+f(3.43)>6$ 等价于 $f(3.43)>f(3.44)$，因为 $3<3.43<3.45$，选项 A 错误．

因为 $1<\ln10<3$，$1<3-\ln2<3$，而 $\ln10-(3-\ln2)=\ln\frac{20}{e^3}<0$，所以 $\ln10<3-\ln2$，因此 $f(\ln10)>f(3-\ln2)$，选项 B 正确．

当 $0<x<1$ 时，$g(x)=f(x)-f(2-x)$ 单调递增，所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $f(x)<f(2-x)$，因为 $0<\frac{3}{\pi}<1$，所以 $f(\frac{3}{\pi})<f(2-\frac{3}{\pi})$，选项 C 正确．

当 $x=2\pm\sqrt{3}$ 时，$x^2-4x+1=0$，所以 $f(x)=x(x^2-4x+1)-2(x^2-4x+1)+3=3$，从而 $f(2+\sqrt{3})=f(2-\sqrt{3})$，$f(\frac{e}{10})<f(2+\sqrt{3})$ 等价于 $f(\frac{e}{10})<f(2-\sqrt{3})$，因为 $2-\sqrt{3}<\frac{e}{10}<1$，所以 $f(2-\sqrt{3})<f(\frac{e}{10})$，选项 D 正确．

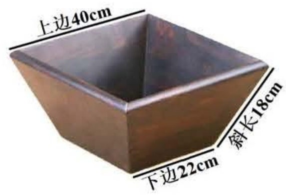
13．若集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 3, 4, 5\}$，则 $A\cap B$ 真子集的个数为______．

答案：7．

解：

$A\cap B=\{2, 3, 4\}$，真子集的个数为 $C_3^0+C_3^1+C_3^2=2^3-1=7$．

14．如图，电商平台售卖的木制“升斗”，底部封闭，上部开口，把该升斗看作一个正四棱台，该四棱台侧棱与底面成角的余弦值为______．



答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

解：

该四棱台侧棱与底面成角的余弦值为 $\dfrac{\frac{(40-22)\sqrt{2}}{2}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

15．等比数列$\{a_n\}$前 6 项中的两项分别为 1，2，记事件 A：$a_3<0$，事件 B：$\{a_n\}$既不是递增数列也不是递减数列，则 $P(A|B)=$_______.

答案：$\frac{1}{2}$.

解：

若等比数列$\{a_n\}$既不是递增数列也不是递减数列，则公比为负数．因为$\{a_n\}$前 6 项中的两项分别为 1，2，所以 1，2 只能是$\{a_n\}$的第 1，3，5 项或第 2，4，6 项中的两项.

事件 $A\cap B$：若$a_3<0$，则$\{a_n\}$的第 1，3，5 为负，第 2，4，6 项为正，共有A_3^2种可能.

事件 B：1，2 是$\{a_n\}$第 1，3，5 项或第 2，4，6 项中的两项，有 $2A_3^2$种可能.

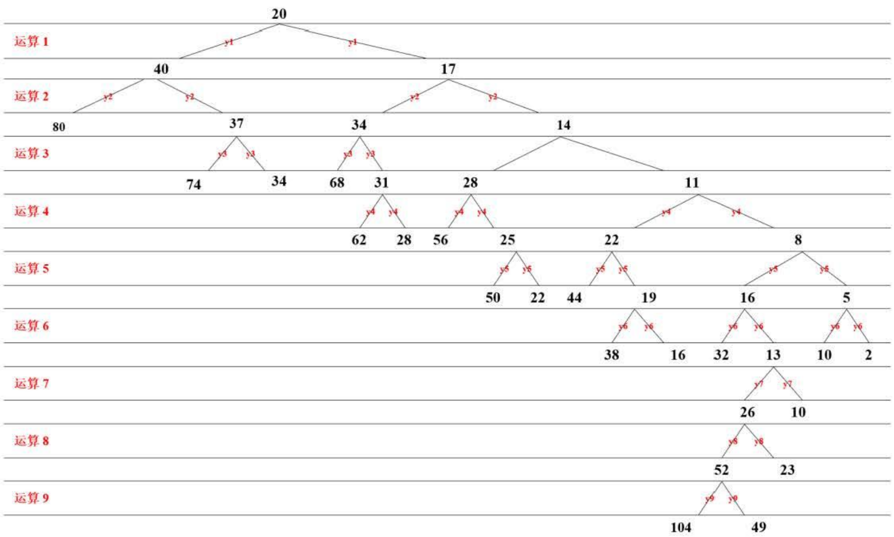
所以 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{A_3^2}{2A_3^2}=\dfrac{1}{2}$.

16．对 20 进行“乘以 2”或“减去 3”的一种运算，对得到的结果再进行“乘以 2”或“减去 3”的一种运算，…，一直进行这样运算，每进行一种运算记作一次运算，已知运算 n 次后，得到结果为 49，则 n 的最小值为_______.

答案：16，数学建模后，知 n 值最小的运算顺序为$[(20-3-3-3-3)\times2-3]\times2\times2-3=49$.

解法 1：

画“树状图”



可知得到结果 49 时 n 的最小值为 9，运算顺序为

$$[(20-3-3-3-3)\times2-3]\times2\times2-3=49.$$

解法 2：

由 49 为奇数且不为 3 的倍数，得第 n 次运算为“52−3”，且最小的 n 值应使“乘以 2”运算的次数最少．设 n 次运算中有 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$次是“乘以 2”，第$a_k$次是“乘以 2”运算，其中 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_k<n-1$，则

$$\{\{[20-3(a_1-1)]\times2-3(a_2-a_1-1)\}\times2-3(a_3-a_2-1)\}\times2\cdots-3(n-a_k)=49.$$

（1）当 $k=1$ 时，

由 $[20-3(a_1-1)]\times2-3(n-a_1)=49$，得 $49-3a_1-3n=52$，$n+a_1=-1$，无解.

（2）当 $k=2$ 时，

由 $\{[20-3(a_1-1)]\times2-3(a_2-a_1-1)\}\times2-3(n-a_2)=49$，得 $6a_1+3n+3a_2=49$，无解.

（3）当 $k=3$ 时，

由 $\{\{[20-3(a_1-1)]\times2-3(a_2-a_1-1)\}\times2-3(a_3-a_2-1)\}\times2-3(n-a_3)=49$，得 $4a_1+2a_2+a_3+n=51$.

因为 $1<a_1<a_2<a_3<n-1$，所以 $a_1\leq6$，$n\geq8$.

若 $n=8$，则 $4a_1+2a_2+a_3=43$，只能 $a_3=7$，此时 $2a_1+a_2=18$ 无解.

若 $n=9$，当 $a_1=6$ 时，$2a_2+a_3=18$ 无解；

当 $a_1=5$ 时，$a_2=7$，$a_3=8$，运算顺序为

$$[(20-3-3-3-3)\times2-3]\times2\times2-3=49.$$

于是 n 的最小值为 9.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。