

数学试题卷

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共 6 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

参考公式：

如果事件  $A, B$  互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件  $A, B$  相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $p$ ，那么

$n$  次独立重复试验中事件  $A$  恰好发生  $k$  次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

其中  $S_1, S_2$  分别表示台体的上、下底面积，

$h$  表示台体的高

柱体的体积公式

$$V = Sh$$

其中  $S$  表示柱体的底面积， $h$  表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中  $S$  表示锥体的底面积， $h$  表示锥体的高

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中  $R$  表示球的半径

选择题部分 (共 40 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$ ， $B = \{x | 0 < \log_3 x < 1\}$ ，则  $A \cap B =$

A.  $\{x | 0 < x < 3\}$

B.  $\{x | 1 < x < 3\}$

C.  $\{x | 0 < x < 2\}$

D.  $\{x | 1 < x < 2\}$

2. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y+1 \geq 0, \\ 2x+y-2 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则  $z=x+2y$  的最大值是

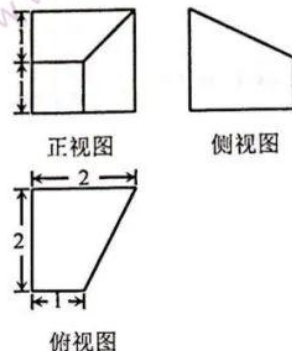
- A. 1                      B. 3                      C. 5                      D. 7

3. 已知椭圆  $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1 (m > 1)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则双曲线  $\frac{x^2}{m} - y^2 = 1$  的离心率是

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                       D.  $\frac{3}{2}$

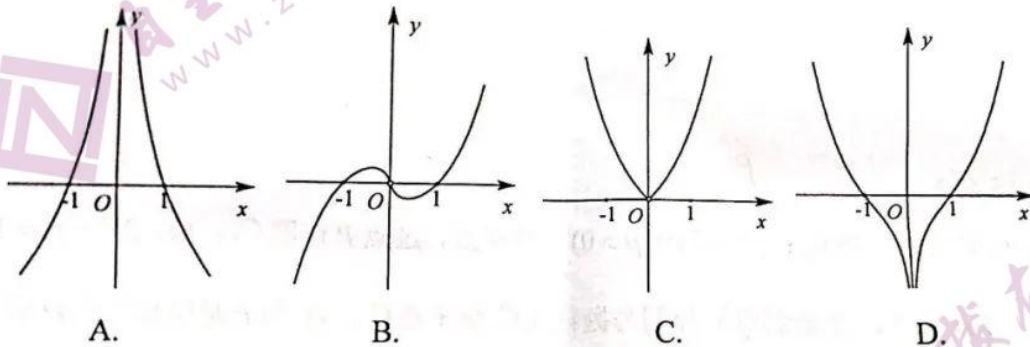
4. 某四棱台的三视图如图所示, 则该四棱台的体积是

- A.  $\frac{10}{3}$                       B.  $\frac{14}{3}$   
C. 10                      D. 14



第4题图

5. 函数  $f(x) = (2^x + 2^{-x}) \cdot \lg|x|$  的图象大致为



6. 设  $a, b$  是实数, 则“ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ”是“ $a^2 > ab$ ”的

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

7. 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 满足  $a_1 = 1, b_1 = 6, a_{n+1} = 2a_n, b_{n+1} = 2b_n - 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ . 若  $a_k = b_k$ ,  $k$  的值是

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7

8. 已知正实数  $a, b$  满足  $a+2b=2$ , 则  $\frac{a^2+1}{a} + \frac{2b^2}{b+1}$  的最小值是

- A.  $\frac{9}{4}$                       B.  $\frac{7}{3}$                       C.  $\frac{17}{4}$                       D.  $\frac{13}{3}$

9. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  上存在点  $P$ , 直线  $l: kx - y + 4 = 0$  上存在点  $Q$ , 使得  $\angle PQO = \frac{\pi}{6}$ , 则

实数  $k$  的取值范围是

A.  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

B.  $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

C.  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

D.  $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

10. 已知关于  $x$  的不等式  $(x^2 + ax + b) \cdot \ln x \geq 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立 (其中  $a, b \in \mathbb{R}$ ), 则

A. 当  $a = -2$  时, 存在  $b$  满足题意

B. 当  $a = 0$  时, 不存在  $b$  满足题意

C. 当  $b = 1$  时, 存在  $a$  满足题意

D. 当  $b = 2$  时, 不存在  $a$  满足题意

### 非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分.

11. 若  $z = 1 + i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $z + \frac{2}{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 若二项式  $\left(\frac{1}{x} - 3\sqrt{x}\right)^n$  的展开式的各项系数之和为 64, 则  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ , 含  $x^3$  项的系数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x \cdot (\cos \omega x - \sqrt{3} \sin \omega x)$  ( $\omega > 0$ ) 的最小正周期为  $\pi$ , 则  $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f(x)$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 某一射击游戏规则为: 一共射击 3 次, 若未击中得 0 分; 第一次击中得 1 分; 若前次未击中, 则接下去这次击中得 1 分; 若出现连续击中情况, 则后一次得分为前一次得分加 1 分.

某选手每次射击击中的概率为  $\frac{1}{2}$ , 记其参加游戏的总得分为  $\xi$ , 则  $P(\xi = 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,

$E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

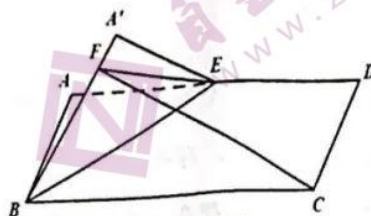
15. 在平面四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD}$ . 若  $|\overrightarrow{AB}| = m$ ,  $|\overrightarrow{CB}| = n$ , 则

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DM} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 当  $x \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  时,  $f(x) = k$ . 若函数  $g(x) = xf(x) - mx - 1$  没有零点, 则正实数  $m$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



17. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $BC=4$ ,  $E$  是边  $AD$  的中点, 将  $\triangle ABE$  沿直线  $BE$  折成  $\triangle A'BE$ , 使得二面角  $A'-BE-C$  的平面角为锐角, 点  $F$  在线段  $A'B$  上运动 (包括端点), 当直线  $CF$  与平面  $A'BE$  所成角最大时,  $\triangle FBE$  在底面  $ABCD$  内的射影面积为\_\_\_\_\_.



第 17 题图

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\cos A = \frac{1}{3}$ ,  $\sin C = \sqrt{2} \cos B$ .

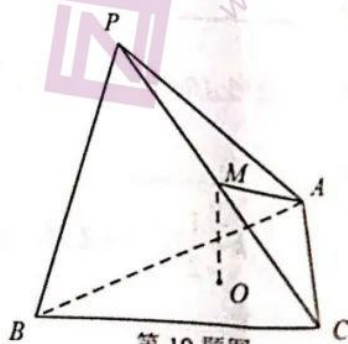
- (I) 求  $\sin B$  的值;  
(II) 若  $c=2$ , 求  $a$  的值.

21.

19. (本题满分 15 分)

如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $M$  是  $PC$  的中点,  $M$  在平面  $ABC$  的射影恰是  $\triangle ABC$  的重心  $O$ , 且  $AB=AC=BC=AP$ .

- (I) 证明:  $AM \perp BC$ ;  
(II) 求直线  $AM$  与平面  $PAB$  所成角的正弦值.



第 19 题图

20. (本题满分 15 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 2$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 且数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是以 1 为公差的等差数列. 数列

$\{b_n\}$  的首项  $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} = 3b_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

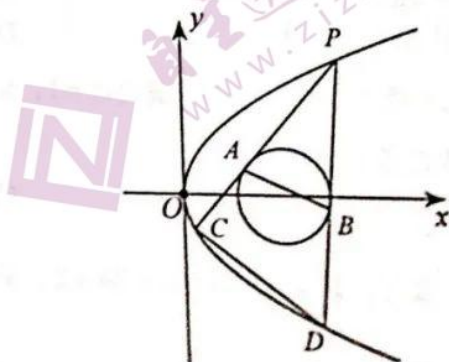
(II) 记  $c_n = \frac{(a_n - 1)b_n}{(b_n + 1)(b_{n+1} + 1)}$ , 求证:  $c_1 + c_2 + \dots + c_n > \frac{1}{2} \frac{n+1}{3^n + 1}$ .

21. (本题满分 15 分)

如图, 已知点  $P$  是抛物线  $C_1: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的动点, 过点  $P$  作圆  $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 1$  的切线  $PA, PB$  ( $A, B$  是切点) 分别与抛物线  $C_1$  交于点  $C, D$ . 当  $P$  是坐标原点  $O$  时,  $|CD| = 4\sqrt{3}$ .

(I) 求抛物线  $C_1$  的方程;

(II) 若  $CD \parallel AB$ , 求点  $P$  的坐标.



第 21 题图

22. (本题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = e^x + (1+x)^2 + \frac{a}{1+x} - a - 2$ ,  $g(x) = bx^2 + x$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

( $e = 2.718281828\dots$  为自然对数的底数)

(I) 求  $f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 若  $a \geq 4$  时,  $f(x) \geq g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立. 当  $b$  取得最大值时, 求  $M = \frac{b+12}{a}$  的最小值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》