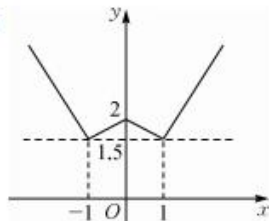


## 2021年普通高等学校招生全国统一考试(考前练兵)·文科数学

### 参考答案、提示及评分细则

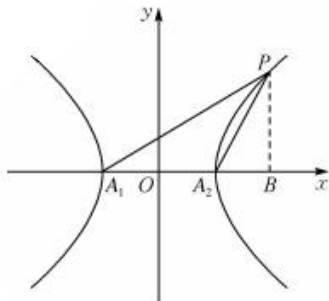
1. D 因为  $M \cup N = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 所以  $M \cup N$  的子集个数是  $2^5 = 32$ . 故选 D.
2. B 由  $z(3-4i) = 4i$ , 得  $z = \frac{4i}{3-4i}$ , 所以  $|z| = \frac{|4i|}{|3-4i|} = \frac{4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{4}{5}$ . 故选 B.
3. C 因为点  $P$  到直线  $x = -9$  的距离比到  $C$  的焦点  $F$  的距离大 7, 所以点  $P$  到直线  $x = -2$  的距离等于到焦点  $F$  的距离, 由抛物线的定义得  $\frac{p}{2} = 2$ , 解得  $p = 4$ . 故选 C.
4. B 由  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ , 得  $\tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta) \cdot (1 - \tan \alpha \tan \beta) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan \alpha \tan \beta$ , 所以  $\tan \alpha + \tan \beta + \sqrt{3} \tan \alpha \tan \beta = \sqrt{3}$ . 故选 B.
5. B 因为  $f(x+3) = -f(x)$ , 所以  $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$ , 所以  $f(x)$  是周期为 6 的周期函数, 所以  $f(2021) = f(6 \times 337 - 1) = f(-1) = f(1)$ . 因为  $f(1) > 7$ , 所以  $f(2021) = 4 + 3a > 7$ , 解得  $a > 1$ . 故选 B.
6. D 若平面过圆柱的轴, 截面形状为①; 如果平面不过圆柱的轴, 平面截圆锥的侧面所得交线应该为曲线(双曲线的一部分), 所以可能为④. 故选 D.
7. A 第一次执行循环体,  $S = 100 - 3 \times 10 = 70, i = 7$ ; 第二次执行循环体,  $S = 70 - 3 \times 7 = 49, i = 4$ ; 第三次执行循环体,  $S = 49 - 3 \times 4 = 37, i = 1$ ; 第四次执行循环体,  $S = 37 - 3 \times 1 = 34, i = -2$ , 此时刚好不满足  $i \geq 0$ , 退出循环, 输出  $S = 34$ . 故选 A.
8. C 由题意知直线  $l$  过定点  $A(-1, -1)$ . 当直线  $l$  与  $CA$  垂直时, 被圆  $C$  所截得的弦最短, 因为  $|CA| = \sqrt{5}$ , 所以弦长的最小值为  $2\sqrt{9-5} = 4$ . 故选 C.

9. A 关于  $x$  的方程  $f(x) = b$  恰有四个不同的实数根可转化为曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = b$  有四个不同交点, 又  $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x, & x < -1, \\ \frac{1}{2}x + 2, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{1}{2}x + 2, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{2}x, & x \geq 1, \end{cases}$  作出  $y = f(x)$  的简图, 结合图象易知  $\frac{3}{2} < b < 2$ .



故选 A.

10. A 不妨设点  $P$  在第一象限, 由题意知  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ , 因为  $\triangle A_1A_2P$  是顶角为  $\frac{2\pi}{3}$  的等腰三角形, 则  $\angle A_1A_2P = \frac{2\pi}{3}, |PA_2| = |A_1A_2| = 2a$ , 所以  $P(2a, \sqrt{3}a)$ , 所以  $\frac{4a^2}{a^2} - \frac{3a^2}{b^2} = 1$ , 所以  $a^2 = b^2$ , 所以  $a = b$ , 所以  $C$  的两条渐近线方程为  $y = \pm x$ . 故其夹角为  $\frac{\pi}{2}$ . 故选 A.



11. C 当  $x = -\frac{\pi}{24}$  时,  $f(x) = \sin\left[6 \times \left(-\frac{\pi}{24}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = 0$ , 故  $f(x)$  的图象关于点  $\left(-\frac{\pi}{24}, 0\right)$  对称. 故 A 正确; 当  $x = -\frac{\pi}{8}$  时,  $f(x) = \sin\left[6 \times \left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = -1$ , 取得最小值, 故  $f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{8}$  对称. 故 B 正确; 令  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 6x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 得  $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{24} \leq x \leq \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ , 令  $k=0$  得函数  $f(x)$  的一个单调递减区间为  $\left[\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}\right]$ , 故 C 不正确; 令  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 6x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ , 得  $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{24} (k \in \mathbb{Z})$ . 令  $k=1$  得函数  $f(x)$  的一个单调递增区间为  $\left[\frac{5\pi}{24}, \frac{3\pi}{8}\right]$ , 故 D 正确. 故选 C.

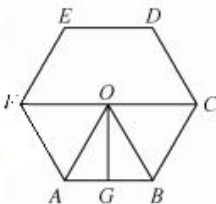
12. D 对于①, 由  $A > B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow \sin A > \sin B$ , 故①正确; 对于②, 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 则  $A + B > \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\frac{\pi}{2} > A > \frac{\pi}{2} - B > 0$ , 所以  $\sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ , 即  $\sin A > \cos B$ , 同理  $\sin B > \cos A$ , 所以  $\sin A + \sin B > \cos A + \cos B$ , 故②正确; 对于③, 当  $0 < A < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin A < \cos B \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) < \cos B$ , 即  $\frac{\pi}{2} - A > B \Rightarrow A + B < \frac{\pi}{2}$ , 即  $C > \frac{\pi}{2}$ , 则  $\triangle ABC$  为钝角三角形, 若  $A > \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin A < \cos B \Leftrightarrow \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) < \cos B$ , 即  $A - \frac{\pi}{2} > B \Rightarrow A > \frac{\pi}{2} + B$  成立,  $A$  是钝角, 当  $A = \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin A > \cos B$ , 不符合  $\sin A < \cos B$ , 故③正确; 对于④,  $A + B < \pi \Rightarrow A < \pi - B, \therefore 0 < A < \pi, 0 < \pi - B < \pi, \therefore \cos A > \cos(\pi - B) = -\cos B$ , 即  $\cos A + \cos B > 0$ , 故④不正确. 故选 D.

13.  $2ex - y - e = 0 \quad f'(x) = (1+x)e^x$ , 所以  $f'(1) = 2e, f(1) = e$ , 所以所求切线方程为  $y - e = 2e(x - 1)$ . 化简得  $2ex - y - e = 0$ .

=0.

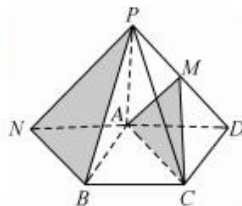
14.  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$  由题意知  $1 \times k + (-4) \times 1 = 0$ , 解得  $k=4$ , 所以  $b=(4, 1)$ ,  $3a+2b=(11, -10)$ , 所以  $\cos\langle 3a+2b, b \rangle = \frac{b \cdot (3a+2b)}{|b||3a+2b|} = \frac{34}{\sqrt{17} \times \sqrt{13 \times 17}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ .

15.  $\frac{1}{2}$  如图, 正六边形  $ABCDEF$  的中心为  $O$ , 过点  $O$  作  $OG \perp AB$ , 垂足为  $G$ . 易知  $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ , 且  $OA=OB$ , 所以  $\triangle AOB$  是等边三角形, 所以  $OA=OB=AB=1$ ,  $OG=OA \cdot \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 则对角线  $CF$  上的点到  $AB$  的距离都为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 设  $\triangle MAB$  中  $AB$  边上的高为  $h$ , 则  $\frac{1}{2} \times 1 \times h > \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 解得  $h > \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 即要使  $\triangle MAB$  的面积大于  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , 需满足  $h > \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 也就是使  $M$  位于梯形  $CDEF$  内.

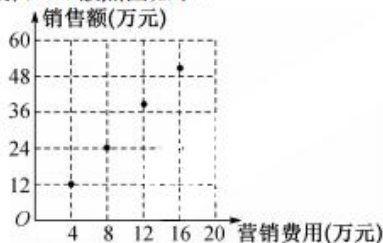


故由几何概型, 得  $\triangle MAB$  的面积大于  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  的概率  $P = \frac{S_{\text{梯形}CDEF}}{S_{\text{六边形}ABCDEF}} = \frac{1}{2}$ .

16. 1 延长  $DA$  至  $N$ , 使得  $AD=AN$ , 连接  $NB$ , 则  $PN \parallel AM$ ,  $NB \parallel AC$ . 所以过点  $P$  且与平面  $MAC$  平行的平面  $PBN$ , 即为  $\alpha$ . 所以  $PB$  即为  $l$ , 所以  $l$  与  $CD$  所成角为  $\angle PBA = 45^\circ$ , 故其正切值为 1.



17. 解: (1) 散点图如下.



..... 4 分

(2) 由表中数据, 得  $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 1496$ ,  $\bar{x} = 10$ ,  $\bar{y} = 31$ ,  $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 480$ , ..... 7 分

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4 \bar{x}^2} = \frac{1496 - 4 \times 10 \times 31}{480 - 4 \times 10^2} = 3.2, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 31 - 3.2 \times 10 = -1,$$

故所求线性回归方程为  $\hat{y} = 3.2x - 1$ . ..... 9 分

(3) 将  $y=63$  代入回归直线方程  $\hat{y} = 3.2x - 1$ , 得  $63 = 3.2x - 1$ , 解得  $x=20$  (万元).

所以该企业在销售额为 63 万元时营销费用大约需要 20 万元. .... 12 分

18. 解: (1) 法一: 因为  $a_1=2$ ,  $(n+2)a_n=3(n+1)a_{n+1}$ ,

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{3(n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n}{n+1}, \text{ ..... 2 分}$$

$$\text{又 } \frac{a_1}{2} = 1,$$

所以  $\left\{ \frac{a_n}{n+1} \right\}$  是以 1 为首项,  $\frac{1}{3}$  为公比的等比数列. .... 4 分

$$\text{所以 } \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{3^{n-1}}, \text{ 即 } a_n = \frac{n+1}{3^{n-1}}. \text{ ..... 6 分}$$

法二: 因为  $a_1=2$ ,  $(n+2)a_n=3(n+1)a_{n+1}$ ,

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{3(n+1)}. \text{ ..... 1 分}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{3n}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n}{3(n-1)}, \dots, \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{3 \times 2}, \text{ ..... 3 分}$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \dots \times \frac{a_2}{a_1} = \frac{n+1}{3n} \times \frac{n}{3(n-1)} \times \dots \times \frac{3}{3 \times 2},$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{a_1} = \frac{n+1}{2 \times 3^{n-1}}, \text{ 所以 } a_n = \frac{n+1}{3^{n-1}}. \text{ ..... 5 分}$$

当  $n=1$  时上式也成立, 所以  $a_n = \frac{n+1}{3^{n-1}}$ . .... 6 分

$$(2) S_n = \frac{2}{3^0} + \frac{3}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{n+1}{3^{n-1}}, \text{ ①}$$

①两边同乘以  $\frac{1}{3}$ , 得



$$\frac{1}{3}S_n = \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{n+1}{3^n}, \textcircled{2} \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

①-②,得

$$\frac{2}{3}S_n = 2 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n} = 2 + \frac{1}{3} \left( \frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}} \right) - \frac{n+1}{3^n} \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{5}{2} - \frac{2n+5}{2 \times 3^n},$$

所以  $S_n = \frac{15}{4} - \frac{2n+5}{4 \times 3^{n-1}}$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

19. (1)证明:在矩形  $ABCD$  中,  $BC=2AB=4$ ,  $E$  为  $BC$  的中点,

所以  $BE=CE=\frac{1}{2}BC=2$ ,  $AB=2$ , 所以  $AE=DE=2\sqrt{2}$ ,  $\angle AEB=\angle DEC=45^\circ$ .  $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

所以  $\angle AED=90^\circ$ , 所以  $AE \perp DE$ .  $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

因为  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $DE \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp DE$ .  $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

又因为  $AE, PA \subset$  平面  $PAE$ ,  $AE \cap PA=A$ , 所以  $DE \perp$  平面  $PAE$ .

又  $AF \subset$  平面  $PAE$ , 所以  $DE \perp AF$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

因为  $AE=AP$ ,  $F$  为  $PE$  的中点, 所以  $PE \perp AF$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

又因为  $DE, PE \subset$  平面  $PED$ ,  $DE \cap PE=E$ , 所以  $AF \perp$  平面  $PED$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2)解:设三棱锥  $P-ADE$  内切球的半径为  $r$ , 球心为  $O$ , 连接  $OA, OP, OE, OD$ ,

由(1)可得  $\angle PAE=\angle PED=\angle AED=\angle PAD=90^\circ$ ,  $AE=DE=PA=2\sqrt{2}$ ,  $PE=AD=4$ ,

所以  $S_{\triangle APE}=S_{\triangle AED}=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}=4$ ,  $S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PED}=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4=4\sqrt{2}$ ,  $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

$$V_{\text{三棱锥}P-AED} = \frac{1}{3} \times 4 \times 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{又 } V_{\text{三棱锥}O-AED} + V_{\text{三棱锥}O-PAE} + V_{\text{三棱锥}O-PAD} + V_{\text{三棱锥}O-PED} = V_{\text{三棱锥}P-AED}$$

所以  $\frac{1}{3}(4+4+4\sqrt{2}+4\sqrt{2})r = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ ,  $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

所以  $r=2-\sqrt{2}$ .

所以三棱锥  $P-ADE$  内切球的表面积为  $4\pi(2-\sqrt{2})^2=8(3-2\sqrt{2})\pi$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

20. (1)解:设椭圆  $C$  的半焦距为  $c$ .

因为椭圆  $C$  的左焦点为  $F_1(-1,0)$ , 所以  $c=1$ .  $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

且因为离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 即  $\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $a=\sqrt{2}$ .  $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以  $b^2=a^2-c^2=1$ .  $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2)证明:设点  $I(x_1, y_1), J(x_2, y_2)$ , 则点  $E(x_1, -y_1), N(x_2, -y_2)$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1, \\ y=k(x+2), \end{cases}$  消去  $y$  并整理得  $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-2=0$ ,  $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

$$\Delta=(8k^2)^2-4(1+2k^2)(8k^2-2)>0, \text{ 即 } k^2<\frac{1}{2}.$$

由韦达定理, 得  $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{1+2k^2}$ ,  $x_1x_2=\frac{8k^2-2}{1+2k^2}$ .  $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

因为点  $F_1(-1,0)$ , 所以直线  $F_1J$  的斜率为  $k_{F_1J}=\frac{y_2}{x_2+1}$ , 直线  $F_1E$  的斜率为  $k_{F_1E}=\frac{-y_1}{x_1+1}$ .  $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

因为  $y_2(x_1+1)-(-y_1)(x_2+1)=k(x_2+2)(x_1+1)+k(x_1+2)(x_2+1)$   $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

$$=k[2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4]=k\left[2 \cdot \frac{8k^2-2}{1+2k^2}+3\left(-\frac{8k^2}{1+2k^2}\right)+4\right]$$

$$=k\left(\frac{16k^2-4-24k^2+4+8k^2}{1+2k^2}\right)=0, \quad \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{所以 } k_{F_1J}-k_{F_1E}=\frac{y_2}{x_2+1}-\frac{-y_1}{x_1+1}=\frac{y_2(x_1+1)-(-y_1)(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=0$$

所以  $k_{F_1J}=k_{F_1E}$ ,

所以  $J, F_1, E$  三点共线.  $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

21. (1)解:函数  $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x+\frac{1}{x}-x$  的定义域是  $(0, +\infty)$ .

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln x+\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-1=-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}-1=-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-\ln x+x-x^2}{x^2}. \quad \dots\dots 1 \text{分}$$



令  $g(x) = -\ln x + x - x^2$ , 则  $g'(x) = -\frac{1}{x} + 1 - 2x = -\frac{2x^2 - x + 1}{x}$ . ..... 2分

因为  $x > 0$ ,  $2x^2 - x + 1 = 2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8} > 0$ , 所以  $g'(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

$g(1) = 0$ , 所以在  $(0, 1)$  上  $g(x) > 0$ , 在  $(1, +\infty)$  上  $g(x) < 0$ . ..... 4分

所以在  $(0, 1)$  上  $f'(x) > 0$ , 在  $(1, +\infty)$  上  $f'(x) < 0$ ,  
所以  $f(x)$  的单调递增区间是  $(0, 1)$ , 单调递减区间是  $(1, +\infty)$ . ..... 5分

(2) 证明: 由 (1) 知函数  $f(x)$  的定义域是  $(0, +\infty)$ , 在  $x = 1$  处取得极大值, 也是最大值,

所以  $f(x) \leq f(1) = 0$ , 则  $(1 + \frac{1}{x}) \ln x + \frac{1}{x} - x \leq 0$ , 则  $\frac{x+1}{x} \ln x \leq \frac{(x-1)(x+1)}{x}$ .

易知  $\frac{x+1}{x} > 0$ , 则不等式两边同除以  $\frac{x+1}{x}$ , 可得  $\ln x \leq x - 1$  (当且仅当  $x = 1$  时等号成立). ..... 8分

令  $x = \frac{n-1}{n}$ , 则  $\ln \frac{n-1}{n} < \frac{n-1}{n} - 1 (n \geq 2, \text{且 } n \in \mathbf{N}^*)$ .

所以  $\ln \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - 1, \ln \frac{2}{3} < \frac{2}{3} - 1, \ln \frac{3}{4} < \frac{3}{4} - 1, \dots, \ln \frac{n-1}{n} < \frac{n-1}{n} - 1$ . ..... 9分

以上  $n-1$  个式子相加, 得

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{n-1}{n} < \frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{3} - 1 + \frac{3}{4} - 1 + \dots + \frac{n-1}{n} - 1,$$

$$\text{得 } \ln \left( \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \right) < \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-1}{n} - (n-1),$$

$$\text{得 } \ln \frac{1}{n} < \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-1}{n} - n + 1.$$

$$\text{得 } n - \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-1}{n},$$

$$\text{得 } \ln e^n - \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-1}{n},$$

$$\text{得 } \ln \frac{e^n}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{n} (n \geq 2, \text{且 } n \in \mathbf{N}^*). \dots\dots\dots 12分$$

22. 解: (1) 由  $\begin{cases} x = 2\cos \alpha, \\ y = \sin \alpha, \end{cases}$  得曲线  $C$  的普通方程  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 3分

由  $\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta + 2 = 0$ ,  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$  得直线  $l$  的直角坐标方程  $x - 2y + 2 = 0$ . ..... 5分

(2) 过点  $A(0, -2)$  且与  $l$  垂直的直线的参数方程为  $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}}{5}t, \\ y = -2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases} (t \text{ 为参数}). \dots\dots\dots 7分$

代入曲线  $C$  的方程得  $\frac{17}{5}t^2 - \frac{32\sqrt{5}}{5}t + 12 = 0$ . ..... 8分

$$\text{则 } \Delta = \frac{32^2}{5} - 4 \times 17 \times 12 = \frac{208}{5} > 0.$$

设点  $M, N$  对应的参数分别为  $t_1, t_2$ , 则  $t_1 t_2 = \frac{60}{17}$ .

$$\text{所以 } |AM| \cdot |AN| = |t_1 t_2| = \frac{60}{17}. \dots\dots\dots 10分$$

23. 解: (1) 由  $f(x) < 4$ , 得  $|x^2 - 1| < 4$ . ..... 1分

$$\text{得 } -4 < x^2 - 1 < 4, \dots\dots\dots 3分$$

$$\text{即 } -3 < x^2 < 5.$$

$$\text{解得 } -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}.$$

故不等式  $f(x) < 4$  的解集是  $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ . ..... 5分

(2) 关于  $x$  的不等式  $|x^2 - 1| - |x^2 - a^2| > 3$  有实数解.

$$\text{因为 } |x^2 - 1| - |x^2 - a^2| \leq |(x^2 - 1) - (x^2 - a^2)| = |a^2 - 1|,$$

当且仅当  $x^2 - 1$  与  $x^2 - a^2$  同为 0 或同号, 且  $|x^2 - 1|$  不小于  $|x^2 - a^2|$  时等号成立, ..... 7分

$$\text{所以 } |a^2 - 1| > 3, \dots\dots\dots 8分$$

$$\text{得 } a^2 - 1 > 3 \text{ 或 } a^2 - 1 < -3, \dots\dots\dots 9分$$

$$\text{得 } a^2 > 4 \text{ 或 } a^2 < -2 \text{ (无解, 舍去), 解得 } a > 2 \text{ 或 } a < -2.$$

故实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ . ..... 10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》