2022—2023学年高中毕业班阶段性测试(二)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{y|y=\sqrt{x^2+1}\}$, $B=\{x|x^2-4\leqslant0\}$,则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $[-1,2]$　　B. $[-2,1]$　　C. $[-2,1)$　　D. $[1,2]$

2. 下列函数中,既是奇函数又在定义域上单调递增的是

A. $y=-\dfrac{1}{x}$　　B. $y=\tan x$　　C. $y=x|x|+1$　　D. $y=x^{\frac{1}{3}}$

3. 已知角 θ 的顶点在坐标原点,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边经过点 $P(t,-\sqrt{t})$ $(t>0)$,则

A. $\cos2\theta>0$　　B. $\cos2\theta<0$　　C. $\sin2\theta>0$　　D. $\sin2\theta<0$

4. 在计算机尚未普及的年代,人们在计算三角函数时常常需要查表得到正弦和余弦值,三角函数表的制作最早可追溯到古希腊数学家托勒密.下面给出了正弦表的一部分,例如,通过查表可知2°12′的正弦值为0.038 4,30°54′的正弦值为0.513 5,等等.则根据该表,416.5°的余弦值为 来源微信公众号:高三答案

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523
…………											

（续表）

30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736
…………											

A. 0.546 1　　B. 0.551 9　　C. 0.550 5　　D. 0.573 6

5. 一种在恒温大棚里种植的蔬菜的株高 y（单位：cm）与温度 x（单位：℃，$0<x\leqslant 30$）满足关系式 $y=111.54-\frac{10}{x}$，市场中一吨这种蔬菜的利润 z（单位：百元）与 x,y 的关系为 $z=10y-x$，则 z 的最大值为

A. 1 095.4　　B. 995.4　　C. 990.4　　D. 895.4

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(ax-1),x>2,\\ 2^x-3,x\leqslant 2\end{cases}$ 在定义域上单调递增，则实数 a 的取值范围为

A. $(0,+\infty)$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

7. 下列条件是"过点 $(a,2)$ 可以作两条与曲线 $y=2^{x-1}$ 相切的直线"的充分条件的是

A. $a<1$　　B. $a<2$　　C. $a>e$　　D. $a>\ln 2$

8. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的一个极大值点为 $x=\frac{\pi}{6}$，若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$（$a>0$）上单调递增，则 a 的最大值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

9. 已知函数 $y=3\sin x(\pi<x<2\pi)$ 与 $y=\frac{8}{\tan x}$ 的图象交于点 P，过点 P 作 y 轴的平行线，该直线与函数 $y=\sin x+2\sqrt{2}\cos x$ 的图象交于点 Q，则 $|PQ|=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. $3-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

10. 若函数 $f(x)$ 满足：对任意非零实数 x，均有 $f(x)=f\left(-\frac{1}{x}\right)$，则我们称函数 $f(x)$ 为"倒数偶函数"。若 $f(x)=\frac{(x+a)(2x+b)(x^2-x-2)}{x^2}$ 是倒数偶函数，则 $f(x)$ 的所有极值点的乘积为

A. -4　　B. 4　　C. -1　　D. 1

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ex\ln x,0<x\leqslant 1,\\ 2f(x-1),x>1,\end{cases}$ 则方程 $2[f(x)]^2+7f(x)+6=0$ 在区间 $(0,4)$ 上的实根个数为

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

12. 已知 $a=\sin\dfrac{1}{e}$，$b=\dfrac{1}{e+1}$，$c=\ln(e+1)-1$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $a<c<b$　　D. $b<a<c$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=\sqrt{\log_2\dfrac{x-1}{x+1}}$ 的定义域为________.

14. 已知 $\sin\alpha-2\cos\alpha=\sqrt{5}$，则 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

15. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，若 $f(4-x)+f(2+x)=6$，$f'(2)=1$，且当 $x<3$ 时，$f'(x)$ 单调递减，则 $f'(x)\leqslant 1$ 的解集为________.

16. 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边，且 $-\sqrt{2}b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$，则 $\sin^2B+\sin^2C$ 的最小值为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，再将所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$ 的图象.

（Ⅰ）求 $g(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若函数 $\varphi(x)=|g(x)|\cos x+\sqrt{3}\cos 2x$，求 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的所有最大值点.

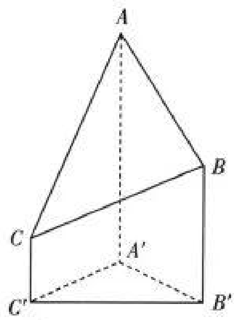
18.（12 分）

如图所示，A,B,C 是相隔不远的三座山峰的峰顶，地理测绘员要在 A,B,C 三点进行测量. 在 C 点测得 B 点的仰角为 $30°$，B 与 C 的海拔高度相差 180 m；在 B 点测得 A 点的仰角为 $45°$. 设 A,B,C 在同一水平面上的射影为 A',B',C'，且 $\angle A'C'B'=\angle A'B'C'=30°$.

（Ⅰ）求 A 与 C 两点的海拔高度差.

（Ⅱ）已知该地大气压强 p(Pa) 随海拔高度 h(m) 的变化规律是 $p=p_0e^{-kh}$（$k=0.000\ 126\ \mathrm{m}^{-1}$），$p_0$ 是海平面大气压强. 设 A,C 两处测得的大气压强分别为 p_1,p_2，估计 $\dfrac{p_1}{p_2}$ 的值.

参考数据：$\ln 0.955\ 65\approx-0.045\ 36$，$\ln 0.977\ 58\approx-0.022\ 68$.



19.（12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{8(x+a)}{x^2+bx+4}$的图象关于原点对称.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间和最值；

（Ⅱ）若存在实数x_0满足$e^{f(x_0)}-m=f(x_0)$，求实数m的取值范围.

20.（12 分）

在△ABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$(1+\sin B+\cos B)\left(\cos\dfrac{B}{2}-\sin\dfrac{B}{2}\right)=\dfrac{7}{12}\sqrt{2+2\cos B}$.

（Ⅰ）求$\cos B$；

（Ⅱ）若$\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$，$D$为边$AC$上一点，且$BD=AC$，求$\dfrac{AD}{DC}$的值.

21.（12 分）

已知函数$f(x)=x^3-5x^2+5x+3$.

（Ⅰ）设曲线$y=f(x)$在点$(3,f(3))$处的切线为l，求l与坐标轴围成的三角形的面积；

（Ⅱ）若$k<2$，证明：曲线$y=f(x)$与直线$y=kx-6$仅有一个交点.

22.（12 分）

已知函数$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-bx$的最小值为0.

（Ⅰ）求实数b的值；

（Ⅱ）当$0<a\leqslant 2$且$x>0$时，证明：$(x^2+2x+e^{-x})(x+1)>af(x)+ax+1$.

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(二)

理科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　$\because A=\{y|y\geqslant 1\}$,$\therefore \complement_{\mathbf{R}}A=\{y|y<1\}$,$B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$,则$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=[-2,1)$.

2. 答案　D

命题意图　本题考查函数奇偶性与单调性的判定.

解析　对于 A,$y=-\dfrac{1}{x}$是奇函数,但在定义域上不单调;同理 B 也不符合;对于 C,$y=x|x|+1$ 不是奇函数;D 符合.

3. 答案　D

命题意图　本题考查三角函数的概念,三角恒等变换.

解析　由题意知 $\cos\theta>0,\sin\theta<0$,所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta<0$.

4. 答案　B

命题意图　本题考查诱导公式及其应用.

解析　由题意,$\cos 416.5^{\circ}=\cos 56.5^{\circ}=\sin 33.5^{\circ}=\sin 33^{\circ}30'$,查表可得 $\sin 33^{\circ}30'=0.551\ 9$.

5. 答案　A

命题意图　本题考查函数模型,以及基本不等式的应用.

解析　由题意知 $z=10y-x=1\ 115.4-\left(\dfrac{100}{x}+x\right)$,由基本不等式可得$\dfrac{100}{x}+x\geqslant 20$,所以 $z\leqslant 1\ 115.4-20=1\ 095.4$,当且仅当 $x=10$ 时等号成立.

6. 答案　D

命题意图　本题考查分段函数的性质.

解析　根据题意$\begin{cases}a>0,\\2a-1\geqslant 0,\\\log_2(2a-1)\geqslant 2^2-3,\end{cases}$　所以 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$.

7. 答案　C

命题意图　本题考查函数的图象与性质.

解析　根据曲线 $y=2^{x-1}$的形状,当点$(a,2)$在点$(2,2)$右边时,可以作两条与曲线 $y=2^{x-1}$相切的直线,即充要条件为 $a>2$,所以“$a>e$”是“$a>2$”的一个充分条件.

8. 答案　A

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　根据题意,$2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.$\because|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore$ 函数

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore x\in\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$，$\because f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上单调递增，$\therefore a$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

9. **答案** A

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质，三角恒等变换.

解析 设 $P(x_0,3\sin x_0)$，则 $3\sin x_0=\frac{8}{\tan x_0}$，得 $\frac{\sin^2 x_0}{\cos x_0}=\frac{8}{3}$，即 $\frac{1-\cos^2 x_0}{\cos x_0}=\frac{8}{3}$，可得 $\cos x_0=\frac{1}{3}(-3$ 舍去). 又因为 $x_0\in(\pi,2\pi)$，从而 $\sin x_0=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 P 点的纵坐标为 $3\sin x_0=-2\sqrt{2}$，Q 点的纵坐标为 $\sin x_0+2\sqrt{2}\cos x_0=0$，所以 $|PQ|=2\sqrt{2}$.

10. **答案** C

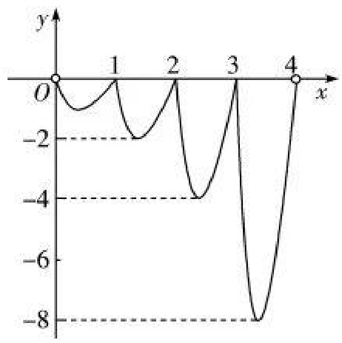
命题意图 本题考查函数的性质，以及导数的计算.

解析 由 $f(x)$ 的解析式可知 $f(-1)=0$，$f(2)=0$，因为 $f(x)$ 是倒数偶函数，所以 $f(1)=f(-1)=0$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(2)=0$. 又方程 $x^2-x-2=0$ 的两根为 -1 和 2，所以 $(x+a)(2x+b)=0$ 的两根为 1 和 $-\frac{1}{2}$，所以 $(x+a)\cdot(2x+b)=(x-1)(2x+1)$，所以 $f(x)=\frac{(x-1)(2x+1)(x+1)(x-2)}{x^2}=\frac{2x^4-3x^3-4x^2+3x+2}{x^2}$，求导可得 $f'(x)=\frac{4x^4-3x^3-3x-4}{x^3}=\frac{(x^2+1)(4x^2-3x-4)}{x^3}$，令 $f'(x)=0$，得 $4x^2-3x-4=0$，$\Delta>0$，此方程两根即 $f(x)$ 的两个极值点，所以 $f(x)$ 的所有极值点的乘积为 -1.

11. **答案** C

命题意图 本题考查分段函数、函数图象与方程的根的综合问题.

解析 当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}x\ln x$，则 $f'(x)=\mathrm{e}(\ln x+1)$，当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x)<0$，当 $\frac{1}{\mathrm{e}}<x\leqslant 1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$ 上单调递增，最小值为 -1. 结合函数的“周期”规律得 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上的大致图象如图所示. 因为 $2[f(x)]^2+7f(x)+6=0$，所以 $f(x)=-2$ 或 $f(x)=-\frac{3}{2}$. 当 $f(x)=-2$ 时，对应的 x 的值有 5 个；当 $f(x)=-\frac{3}{2}$ 时，对应的 x 的值有 6 个. 故 $2[f(x)]^2+7f(x)+6=0$ 在区间 $(0,4)$ 上的实根个数为 11.



12. **答案** B

命题意图　本题考查利用函数与导数比较大小.

解析　设$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}$,则$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$,当$x>0$时,$f'(x)>0$,所以$f\left(\frac{1}{e}\right)>f(0)=0$,所以$\ln\frac{e+1}{e}=\ln(e+1)-1>\frac{1}{1+e}$,即$c>b$. 设$g(x)=\sin x-\ln(1+x)$,则$g'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$,所以$g''(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$. 易知$g''(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减,又$g''(0)=1>0$,$g''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{3}+1\right)^2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}<0$,所以$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,使得$g''(x_0)=0$,且$g'(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$\left(x_0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减. 又$g'(0)=0$,$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\frac{\pi}{3}+1}>0$,所以当$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递增,所以$g\left(\frac{1}{e}\right)>g(0)=0$,所以$\sin\frac{1}{e}>\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)=\ln(e+1)-1$,即$a>c$. 综上可得$b<c<a$.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. **答案**　$(-\infty,-1)$

命题意图　本题考查函数的定义域及对数函数的性质.

解析　$\because\log_2\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$,$\therefore\frac{x-1}{x+1}\geqslant 1$,$\therefore x<-1$,$\therefore f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)$.

14. **答案**　-3

命题意图　本题考查三角恒等变换的应用.

解析　因为$\sin\alpha-2\cos\alpha=\sqrt{5}$,所以$\frac{\sqrt{5}}{5}\sin\alpha-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\alpha=1$,设$\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,则$\sin(\alpha-\varphi)=1$,所以$\alpha-\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\varphi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$\sin\alpha=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$,所以$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=-3$.

15. **答案**　$[2,4]$

命题意图　本题考查函数的对称性和单调性.

解析　根据题意$-f'(4-x)+f'(2+x)=0$,所以$f'(2+x)=f'(4-x)$,所以$f'(x)$的图象关于直线$x=3$对称,所以$f'(2)=f'(4)=1$,又因为当$x<3$时,$f'(x)$单调递减,所以$f'(x)\leqslant 1$的解集为$[2,4]$.

16. **答案**　$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

命题意图　本题考查正、余弦定理以及三角恒等变换的应用.

解析　由正弦定理可得$-\sqrt{2}bc+a^2=b^2+c^2$,即$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\because 0<A<\pi$,$\therefore A=\frac{3\pi}{4}$,$\therefore C=\frac{\pi}{4}-B$且$B\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$\therefore\sin^2B+\sin^2C=\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}=1-\frac{1}{2}\left[\cos 2B+\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)\right]=1-\frac{1}{2}(\cos 2B+\sin 2B)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2B+\frac{\pi}{4}\right)$. $\because B\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$\therefore 2B+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,$\therefore\sin\left(2B+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,

$\therefore (\sin^2 B+\sin^2 C)_{\min}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\left(当 B=\dfrac{\pi}{8}时取得\right)$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 (Ⅰ)将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度,得 $y=2\sin 2x$ 的图象; …… (2 分)

再将所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍,得函数 $y=g(x)=2\sin x$ 的图象.

故 $g(x)=2\sin x$. …… (4 分)

(Ⅱ) $\varphi(x)=|g(x)|\cos x+\sqrt{3}\cos 2x=2|\sin x|\cos x+\sqrt{3}\cos 2x$, …… (5 分)

当 $x\in[0,\pi]$ 时, $\varphi(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

即当 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时, $\varphi(x)$ 取到最大值, …… (7 分)

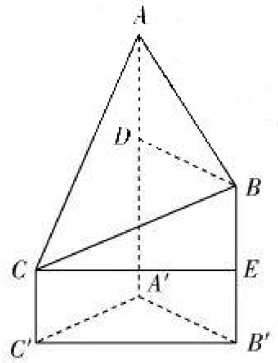
当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时, $\varphi(x)=-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

即当 $x=\dfrac{23\pi}{12}$ 时, $\varphi(x)$ 取到最大值, …… (9 分)

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的所有最大值点为 $\dfrac{\pi}{12},\dfrac{23\pi}{12}$. …… (10 分)

18. **命题意图** 本题考查三角函数的应用以及指数函数模型.

解析 (Ⅰ)如图所示,过 C 作 $CE/\!/C'B'$,交 BB' 于 E,过 B 作 $BD/\!/A'B'$,交 AA' 于 D.



由条件知 $BE=180$, $C'B'=CE=\dfrac{180}{\tan 30^\circ}=180\sqrt{3}$. …… (2 分)

在等腰三角形 $A'B'C'$ 中,可知 $\angle C'A'B'=120^\circ$,

则 $BD=A'B'=\dfrac{180\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=180$. …… (4 分)

又在 B 点测得 A 点的仰角为 45°,

所以 $AD=BD=180$, …… (6 分)

所以 A 与 C 两点的海拔高度差为 $AD+BE=180+180=360(\mathrm{m})$. …… (8 分)

(Ⅱ)设 A,C 两处的海拔高度分别为 h_1,h_2,则 $h_2-h_1=-360$,

则 $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{p_0e^{-0.000\,126h_1}}{p_0e^{-0.000\,126h_2}}$ …… (10 分)

$=e^{0.000\,126(h_2-h_1)}=e^{-0.045\,36}\approx 0.955\,65.$

故$\frac{p_1}{p_2}$的值约为0.955 65. ……………………………………………………………………（12分）

19. **命题意图**　本题考查函数的基本性质，导数的应用.

解析　（Ⅰ）根据题意得$f(-x)+f(x)=0$，$\therefore \frac{8(-x+a)}{(-x)^2-bx+4}+\frac{8(x+a)}{x^2+bx+4}=0$，…………………………（1分）

$\therefore (a-b)x^2+4a=0$，所以$a=b=0$，故$f(x)=\frac{8x}{x^2+4}$，…………………………………………………（2分）

$\therefore f'(x)=\frac{8(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}$，………………………………………………………………………（3分）

列表可得：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小值-2	单调递增	极大值2	单调递减

即$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-2)$和$(2,+\infty)$，单调递增区间为$(-2,2)$. …………………………（4分）

又当$x<0$时，$f(x)<0$，当$x>0$时，$f(x)>0$，当$x=0$时，$f(x)=0$，

故$f(x)$的最小值为$f(-2)=-2$，最大值为$f(2)=2$. ……………………………………………………（6分）

（Ⅱ）易知$f(x)$的值域为$[-2,2]$，令$f(x_0)=t$，条件转化为：存在$t\in[-2,2]$，使得$e^t-m=t$即$e^t-t=m$成立.

设$g(t)=e^t-t$，则$g'(t)=e^t-1$，……………………………………………………………………（7分）

则当$-2\leqslant t<0$时，$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减，当$0<t\leqslant 2$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增，

$\therefore g(t)_{\min}=g(0)=1$，…………………………………………………………………………………（9分）

又$g(-2)=2+e^{-2}$，$g(2)=e^2-2$，$e^2-2>2+e^{-2}$，……………………………………………………（10分）

$\therefore 1\leqslant g(t)\leqslant e^2-2$，$\therefore 1\leqslant m\leqslant e^2-2$，

即实数m的取值范围为$[1,e^2-2]$. ……………………………………………………………………（12分）

20. **命题意图**　本题考查正、余弦定理和三角恒等变换的应用.

解析　（Ⅰ）原式左边$=\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+2\cos^2\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)$

$=2\cos\frac{B}{2}\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)$

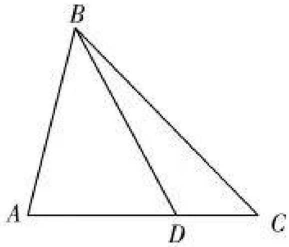
$=2\cos\frac{B}{2}\cos B$，……………………………………………………………………………（2分）

因为$0<B<\pi$，所以原式右边$=\frac{7}{12}\sqrt{4\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{7}{6}\cos\frac{B}{2}$，……………………………………………（4分）

由$2\cos\frac{B}{2}\cos B=\frac{7}{6}\cos\frac{B}{2}$，得$\cos B=\frac{7}{12}$. ………………………………………………………（5分）

（Ⅱ）由题意设$a=3k$，$c=2k$，$k>0$.

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9k^2+4k^2-2\times 3k\times 2k\times\frac{7}{12}=6k^2$，



所以 $BD=AC=\sqrt{6}k$, ………………………………………… (7 分)

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6k^2+4k^2-9k^2}{4\sqrt{6}k^2}=\frac{\sqrt{6}}{24}$. ………………………… (8 分)

在$\triangle ABD$中,设 $AD=m,m>0$, 微信搜《高三答案公众号》

则 $\cos A=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\times AD}=\frac{4k^2+m^2-6k^2}{4km}=\frac{\sqrt{6}}{24}$, ………………………… (9 分)

整理可得 $m^2-\frac{\sqrt{6}}{6}km-2k^2=0$,解得 $m=\frac{2\sqrt{6}}{3}k$(负值舍去). ………………… (10 分)

即 $AD=\frac{2\sqrt{6}}{3}k$,所以 $DC=AC-AD=\frac{\sqrt{6}}{3}k$,

所以$\frac{AD}{DC}=2$. ………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查导数的几何意义,以及利用导数研究函数性质.

解析 (Ⅰ)由已知得 $f'(x)=3x^2-10x+5$,$\therefore f'(3)=2$. ………………… (1 分)

又 $f(3)=0$,$\therefore l$ 的方程为 $y=2(x-3)$, ………………………… (3 分)

$\therefore l$ 与 x 轴的交点为$(3,0)$,与 y 轴的交点为$(0,-6)$, ………………… (4 分)

$\therefore l$ 与坐标轴围成的三角形的面积为$\frac{1}{2}\times3\times6=9$. ………………… (5 分)

(Ⅱ)设 $g(x)=f(x)-kx+6=x^3-5x^2+(5-k)x+9$.

当 $x\leqslant0$ 时,$g'(x)=3x^2-10x+5-k>0$,$g(x)$单调递增. ………………… (6 分)

又 $g(-1)=k-2<0$,$g(0)=9>0$,

$\therefore g(x)=0$ 在$(-\infty,0]$上有唯一实根. ………………………… (7 分)

当 $x>0$ 时,设 $h(x)=x^3-5x^2+3x+9$,则 $g(x)=h(x)+(2-k)x>h(x)$. ………… (8 分)

$h'(x)=3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$,

可得 $h(x)$在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$和$(3,+\infty)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{3},3\right)$上单调递减. ………… (10 分)

又 $h(0)=9>0$,$h(3)=0$,

$\therefore$ 当 $x>0$ 时,$g(x)>h(x)\geqslant h(3)=0$,$\therefore g(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上没有实根. ………… (11 分)

综上,$g(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一实根,即曲线 $y=f(x)$与直线 $y=kx-6$ 仅有一个交点. ………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质,以及证明不等式.

解析 (Ⅰ)由已知得 $f'(x)=\ln(x+1)+1-b$, ………………………… (1 分)

令 $f'(x)=0$,得 $x=e^{b-1}-1$.

当 $x\in(-1,e^{b-1}-1)$时,$f'(x)<0$,当 $x\in(e^{b-1}-1,+\infty)$时,$f'(x)>0$, ………… (2 分)

$\therefore f(x)$在$(-1,e^{b-1}-1)$上单调递减,在$(e^{b-1}-1,+\infty)$上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min}=f(e^{b-1}-1)=(b-1)e^{b-1}-b(e^{b-1}-1)=0$，$\therefore b=e^{b-1}$. ………………………………（3 分）

令 $m(x)=e^{x-1}-x$，则 $m'(x)=e^{x-1}-1$，

当 $x\in(-\infty,1)$时，$m'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$m'(x)>0$，………………………………（4 分）

$\therefore m(x)_{\min}=m(1)=0$，即 $b=e^{b-1}$有唯一解 $b=1$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）$(x^2+2x+e^{-x})(x+1)>af(x)+ax+1$ 可转化为 $x^2+2x-a\ln(x+1)+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+x}>0$. …………（7 分）

$\because x>0,0<a\leqslant 2$，$\therefore a\ln(x+1)\leqslant 2\ln(x+1)$，

$\therefore x^2+2x-a\ln(x+1)+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x+1}\geqslant x^2+2x-2\ln(x+1)+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x+1}$. ………………………………（8 分）

令 $t(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x+1}$，只需证明 $t(x)>0(x>0)$即可.

易知当 $x>0$ 时，$e^x>x+1>0$，$\therefore \frac{1}{x+1}>\frac{1}{e^x}$， ………………………………（9 分）

$$\therefore t'(x)=2x+2-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$>2x+2-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)^3-3(x+1)+1}{(x+1)^2}$$

$$>\frac{2(x+1)^2-3(x+1)+1}{(x+1)^2}=\frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}>0，$$ ………………………………（10 分）

故 $t(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，当 $x>0$ 时，$t(x)>t(0)=0$，………………………………（11 分）

从而原命题得证. ………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。