武昌区 2023 届高三年级 5 月质量检测

数学参考答案及评分细则

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	B	C	B	D	B	B	BD	BD	ABD	BCD

填空题：

13．0 或 1　　14．$\frac{1}{2}$　　15．$\frac{52\pi}{3}$　　16．$\frac{4}{9}$

解答题：

17．（10 分）

解：因为 $\cos B=\frac{5}{13}$，所以 $\sin B=\frac{12}{13}$，

又因为 $\sin A=\frac{3}{5}<\sin B=\frac{12}{13}$，所以 $A<B<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos A=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin C=\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{63}{65}$．（5 分）

（2）由正弦定理可知：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

代入已知条件得 $\frac{13}{\frac{3}{5}}=\frac{b}{\frac{12}{13}}$，解得 $b=20$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times13\times20\times\frac{63}{65}=126$．（10 分）

18．（12 分）

解：（1）因为 $a_{n+1}=S_n+n$，所以 $a_n=S_{n-1}+n-1\left(n\geq2\right)$，

所以 $a_{n+1}=2a_n+1\left(n\geq2\right)$，

整理得 $a_{n+1}+1=2\left(a_n+1\right)\left(n\geq2\right)$．

又因为 $a_2=3$，所以当 $n\geq2$ 时，$a_n+1=\left(a_2+1\right)\times2^{n-2}=2^n\left(n\geq2\right)$，

所以 $a_n=2^n-1\left(n\geq2\right)$，当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 不满足．

所以，$a_n=\begin{cases}2\left(n=1\right)\\2^n-1\left(n\geq2\right)\end{cases}$．（4 分）

（2）（ⅰ）设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d\left(d>0\right)$．

因为 a_1+b_1，a_2+b_2，$a_3+\frac{1}{2}b_3$ 成等比数列，且 $a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=7$，

所以$\left(a_2+b_2\right)^2=\left(a_1+b_1\right)\left(a_3+\dfrac{1}{2}b_3\right)$，即$d^2+12d-13=0$．

又因为$d>0$，所以$d=1$．

所以数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式为$b_n=n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$．（8 分）

（ii）$T_n<\dfrac{3}{4}$．证明如下：

由（i）知，$b_n=n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以$T_n=\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n^2}=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}$．

当$n=1$时，$T_1=\dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{4}$；

当$n\ge 2$时，$T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{2\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4},$$

综上：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\dfrac{3}{4}$．（12 分）

19．（12 分）

（1）证明证明：在$\triangle ABC$中，设$BC=2AB=2m$，

因为$\angle ABC=60^\circ$，

由余弦定理可知：$\cos\angle ABC=\dfrac{m^2+(2m)^2-AC^2}{2\times m\times 2m}=\dfrac{1}{2}$，解得$AC=\sqrt{3}m$．

所以$AC^2+AB^2=BC^2$，所以$AB\perp AC$．

又因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$AB\perp AC$，$AC\subset$平面ABC，

所以$AC\perp$平面PAB．（4 分）

（2）连BD交AC于点M，连接PM，BQ，设PM交BQ于点H．

在$\triangle PBD$中，过P作直线$PT\,/\!/$直线BD交BQ的延长线于N，

易得：$PN:BM=PH:HM=1:1$，

所以点H为线段PM中点．

在$\triangle PAC$中，因为直线$AC\,/\!/$平面α，平面$PAC\cap$平面$\alpha=EF$，

所以直线$EF\,/\!/$直线AC，且直线EF过点H，

所以点E为线段PA中点．

以点A为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，设$AB=2$．

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(-2,4,0)$，$P(1,0,\sqrt{3})$.

因为点 E 为线段 PA 中点，所以 $E\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

由 $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$，得 $Q\left(0,\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

设平面 BEQ（平面 BEF）的法向量为 $\vec{n}_1=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}_1=0\\ \overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}_1=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ 2y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $\vec{n}_1=(1,0,\sqrt{3})$.

设平面 EQD（平面 PAD）的法向量为 $\vec{n}_2=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{AP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(-2,4,0)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_2=0\\ \overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}_2=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\ -2x+4y=0\end{cases}$.

令 $z=-2$，则 $\vec{n}_1=(2\sqrt{3},\sqrt{3},-2)$.

所以 $\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=0$，所以二面角 $B-EQ-D$ 的余弦值为 0.（12 分）

20.（12 分）

解：设多选题正确答案是“选两项”为事件 A_2，正确答案是“选三项”为事件 A_3，

则 $\Omega=A_2\cup A_3$.

考生得 0 分，2 分，5 分为事件 B_0，B_2，B_5，$P(A_2)=p_0$，$p(A_3)=1-p_0$.

（1）当 $P(A_2)=\frac{1}{2}$ 时，$P(A_3)=\frac{1}{2}$，则

正确答案是“选两项”时，考生选 2 项，全对得 5 分，有选错得 0 分；

正确答案是“选三项”时，考生选 2 项，选出了 2 个正确选项得 2 分，有选错得 0 分.

因为 $B_0=A_2B_0\cup A_3B_0$，

所以$P\left(B_0\right)=P\left(A_2B_0\cup A_3B_0\right)=P\left(A_2B_0\right)+P\left(A_3B_0\right)$

$$=P\left(B\middle|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_0\middle|A_3\right)P\left(A_3\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{C_2^2}{C_4^2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{5}{12}+\frac{3}{12}=\frac{2}{3}.$$

因为$B_2=A_2B_2\cup A_3B_2$，

所以$P\left(B_2\right)=P\left(A_2B_2\cup A_3B_2\right)=P\left(A_2B_2\right)+P\left(A_3B_2\right)$

$$=P\left(B_2\middle|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_2\middle|A_3\right)P\left(A_3\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{4},$$

$P\left(B_5\right)=P\left(A_2B_5\cup A_3B_5\right)=P\left(A_2B_5\right)+P\left(A_3B_5\right)$

$$=P\left(B_5\middle|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_5\middle|A_3\right)P\left(A_3\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{C_4^2}+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{12}.$$

所以，得分X的分布列为：

X	0	2	5
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

得分X的数学期望$E\left(X\right)=0\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$．（4分）

（2）方案一：随机选择一个选项

正确答案是“选两项”时，考生选1项，选对得2分，选错得0分；

正确答案是“选三项”时，考生选1项，选对得2分，选错得0分．

因为$B_0=A_2B_0\cup A_3B_0$，

所以$P\left(B_0\right)=P\left(B_0\middle|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_0\middle|A_3\right)P\left(A_3\right)$

$$=p_0\times\frac{2}{4}+\left(1-p_0\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_0.$$

因为$B_2=A_2B_2\cup A_3B_2$，

所以$P\left(B_2\right)=P\left(B_2\middle|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_2\middle|A_3\right)P\left(A_3\right)$

$$=p_0\times\frac{2}{4}+\left(1-p_0\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_0$$

所以，随机选择一个选项得分的数学期望$0\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_0\right)+2\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_0\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}p_0$.

方案二：随机选择两个选项；

$P\left(B_0\right)=P\left(B_0|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_0|A_3\right)P\left(A_3\right)$

$=p_0\times\left(1-\frac{C_2^2}{C_4^2}\right)+\left(1-p_0\right)\times\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{5}{6}p_0+\frac{1}{2}\left(1-p_0\right)=\frac{1}{3}p_0+\frac{1}{2}$,

$P\left(B_2\right)=P\left(B_2|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_2|A_3\right)P\left(A_3\right)$

$=p_0\times0+\left(1-p_0\right)\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}\left(1-p_0\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_0$,

$P\left(B_5\right)=P\left(B_5|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_5|A_3\right)P\left(A_3\right)$

$=p_0\times\frac{1}{C_4^2}+\left(1-p_0\right)\times0=\frac{1}{6}p_0$.

所以，随机选择两个选项得分的数学期望$0\times\left(\frac{1}{3}p_0+\frac{1}{2}\right)+2\times\frac{1}{2}\left(1-p_0\right)+5\times\frac{1}{6}p_0=1-\frac{1}{6}p_0$.

方案三：随机选择三个选项.

正确答案是“选两项”时，考生选 3 项，得 0 分；

正确答案是“选三项”时，考生选 3 项，选对得 5 分，有选错得 0 分.

$P\left(B_0\right)=P\left(B_0|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_0|A_3\right)P\left(A_3\right)$

$=p_0\times1+\left(1-p_0\right)\times\frac{C_3^2}{C_4^3}=p_0+\frac{3}{4}\left(1-p_0\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}p_0$,

$P\left(B_5\right)=P\left(B_5|A_2\right)P\left(A_2\right)+P\left(B_5|A_3\right)P\left(A_3\right)=p_0\times0+\left(1-p_0\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}p_0$,

所以，随机选择三个选项得分的数学期望$0\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}p_0\right)+5\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}p_0\right)=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}p_0$.

因为$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}p_0\right)-\left(1-\frac{1}{6}p_0\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}p_0>0$,

$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}p_0\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}p_0\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}p_0>0$.

所以选择方案一.（12 分）

21.（12 分）

解：（1）由已知得$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=1\end{cases}$，解得$a^2=4$，$b^2=3$．

即椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．（4分）

（2）由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x\end{cases}$，得$A\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

设$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

则$k_{CA}\cdot k_{CB}=\dfrac{y_1^2-\dfrac{3}{4}}{x_1^2-3}=\dfrac{3-\dfrac{3x_1^2}{4}-\dfrac{3}{4}}{x_1^2-3}=-\dfrac{3}{4}$，

同理$k_{DA}\cdot k_{DB}=-\dfrac{3}{4}$．

设$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，则

由直线AC过点M得：$y_3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=k_{AC}\left(x_3-\sqrt{3}\right)$． ①

由直线BC过点N得：$y_4+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=k_{BC}\left(x_4+\sqrt{3}\right)$． ②

①×②得：$\left(y_3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y_4+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}\left(x_3-\sqrt{3}\right)\left(x_4+\sqrt{3}\right)$． ③

同理，由直线BD过点M得：$y_3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=k_{BD}\left(x_3+\sqrt{3}\right)$． ④

由直线AD过点N得：$y_4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=k_{AD}\left(x_4-\sqrt{3}\right)$． ⑤

③×④得：$\left(y_3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y_4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}\left(x_3+\sqrt{3}\right)\left(x_4-\sqrt{3}\right)$． ⑥

③−⑥得：$\sqrt{3}(y_3-y_4)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x_3-x_4)$，进而$k_{MN}=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=-\dfrac{3}{2}$．

所以直线MN的斜率为定值$-\dfrac{3}{2}$．（12分）

22.（12 分）

解：（1）因为 $f\left(x\right)=ax+\left(a-1\right)\ln x+\dfrac{1}{x}$，

所以 $f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)\left(ax-1\right)}{x^2}$，

①当 $a\le 0$ 时，$f'\left(x\right)<0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减；

②当 $a>0$ 时，由 $f'\left(x\right)>0$ 得 $x>\dfrac{1}{a}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

综上：当 $a\le 0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减.（4 分）

（2）（i）方程 $f\left(x\right)=xe^x-\ln x+\dfrac{1}{x}$ 可化为 $xe^x=ax+a\ln x$，

即 $e^{x+\ln x}=a\left(x+\ln x\right)$.

令 $t\left(x\right)=x+\ln x$.

因为函数 $t\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，结合题意，关于 t 的方程 $e^t=at$（*）有两个不等的实根.

又因为 $t=0$ 不是方程（*）的实根，所以方程（*）可化为 $\dfrac{e^t}{t}=a$.

令 $g\left(t\right)=\dfrac{e^t}{t}$，则 $g'\left(t\right)=\dfrac{e^t\left(t-1\right)}{t^2}$.

易得函数 $g\left(t\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 和 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增.

结合函数的图象可知，实数 a 的取值范围是 $\left(e,+\infty\right)$.（8 分）

（ii）要证 $\dfrac{e^{x_1}}{x_2}+\dfrac{e^{x_2}}{x_1}>\dfrac{2a}{x_1x_2}$，只需证 $e^{t_1}+e^{t_2}>2a$.

因为 $e^t=at$，所以只需证 $t_1+t_2>2$.

由（i）知，不妨设 $0<t_1<1<t_2$.

因为$e^t=at$，所以$t=\ln a+\ln t$，即$\begin{cases}t_1=\ln a+\ln t_1\\t_2=\ln a+\ln t_2\end{cases}$，$t_2-t_1=\ln\frac{t_2}{t_1}$.

所以只需证$\frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}>\frac{2}{\ln\frac{t_2}{t_1}}$，即只需证$\frac{\frac{t_2}{t_1}+1}{\frac{t_2}{t_1}-1}>\frac{2}{\ln\frac{t_2}{t_1}}$.

令$t=\frac{t_2}{t_1}(t>1)$，只需证$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$.

令$h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$t>1$，则$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

故$h(t)>h(1)=0$，即$h(t)>0$在$(1,+\infty)$上恒成立.

所以原不等式得证.（12分）