惠州市2023届高三第一次模拟考试试题

数　学

全卷满分150分，时间120分钟．

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号、座位号、学校、班级等考生信息填写在答题卡上。

2．作答单项及多项选择题时，选出每个小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，写在本试卷上无效。

3．非选择题必须用黑色字迹签字笔作答，答案必须写在答题卡各题指定的位置上，写在本试卷上无效。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题满分5分，共40分。

在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，选对得5分，选错得0分。

1．已知复数z满足$z(1+2i)=|4-3i|$(其中i为虚数单位)，则复数z的虚部为(　　)

A．-2　　B．1　　C．$-2i$　　D．i

2．设集合$M=\{x\in Z|100<2^x<1000\}$，则$M$的元素个数为(　　)

A．3　　B．4　　C．9　　D．无穷多个

3．数据68，70，80，88，89，90，96，98的第15百分位数为(　　)

A．69　　B．70　　C．75　　D．96

4．如图1，在高为h的直三棱柱容器$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=2$，$AB\perp AC$．现往该容器内灌进一些水，水深为2，然后固定容器底面的一边AB于地面上，再将容器倾斜，当倾斜到某一位置时，水面恰好为A_1B_1C(如图2)，则容器的高h为(　　)

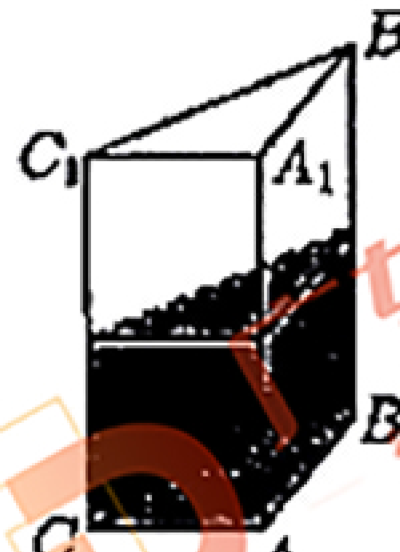


图1

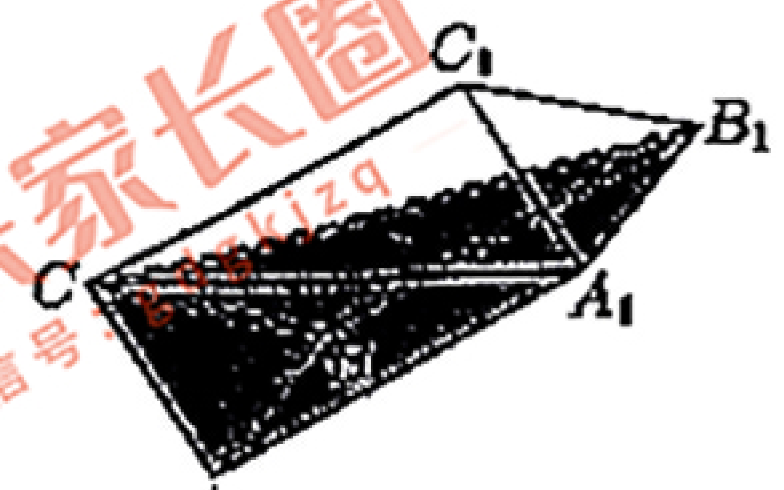


图2

A．$2\sqrt{2}$　　B．3　　C．4　　D．6

5．若$\tan\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{3-\sin\alpha}$，则$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$(　　)

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{8}{9}$　　D．$\dfrac{7}{9}$

6．“家在花园里，城在山水间。半城山色半城湖，美丽惠州和谐家园……”一首婉转动听的《美丽惠州》唱出了惠州的山姿水色和秀美可人的城市环境。下图3是惠州市风景优美的

金山湖片区地图，其形状如一颗爱心。图 4 是由此抽象出来的一个“心形”图形，这个图形可看作由两个函数的图象构成，则“心形”在 x 轴上方的图象对应的函数解析式可能为(　　)

A. $y=|x|\sqrt{4-x^2}$

B. $y=x\sqrt{4-x^2}$

C. $y=\sqrt{-x^2+2|x|}$

D. $y=\sqrt{-x^2+2x}$

图 3

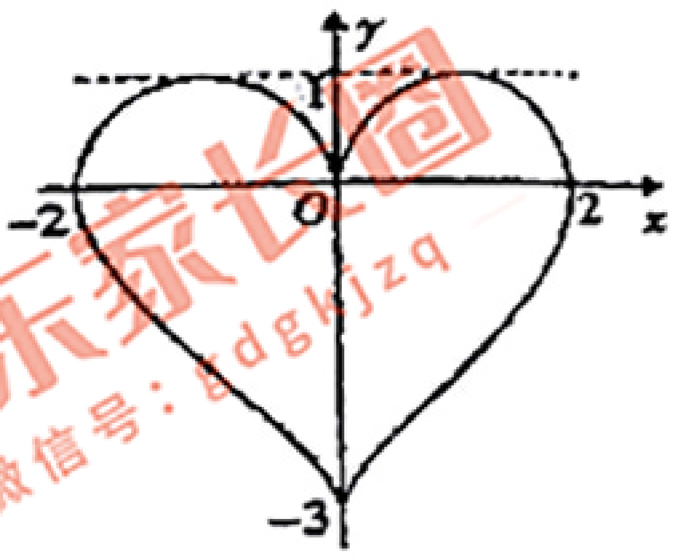


图 4

7. 已知二项式 $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n (n\in N^*)$ 的展开式中只有第4项的二项式系数最大，

现从展开式中任取 2 项，则取到的项都是有理项的概率为(　　)

A. $\dfrac{2}{7}$　　B. $\dfrac{3}{7}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{3}{8}$

8. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 中的任意一个 x，都有 $f(x)>0,-x\in D$，且 $f(-x)f(x)=1$，则称函数 $f(x)$ 为“类奇函数”。若某函数 $g(x)$ 是“类奇函数”，

则下列命题中，错误的是(　　)

A. 若0在 $g(x)$ 定义域中，则 $g(0)=1$

B. 若 $g(x)_{max}=g(4)=4$，则 $g(x)_{min}=g(-4)=\dfrac{1}{4}$

C. 若 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减

D. 若 $g(x)$ 定义域为R，且函数 $h(x)$ 也是定义域为R的“类奇函数”，

则函数 $G(x)=g(x)h(x)$ 也是“类奇函数”

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题满分 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列四个命题中为真命题的是(　　)

A. 若随机变量 ξ 服从二项分布 $B\left(4,\dfrac{1}{4}\right)$，则 $E(\xi)=1$

B. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(3,\sigma^2)$，且 $P(X\le 4)=0.64$，则 $P(2\le X\le 3)=0.07$

C. 已知一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{10}$ 的方差是3，则 $x_1+2,x_2+2,x_3+2,\cdots,x_{10}+2$ 的方差也是3

D．对具有线性相关关系的变量x,y，其线性回归方程为$\hat{y}=0.3x-m$，

若样本点的中心为$(m,2.8)$，则实数m的值是4

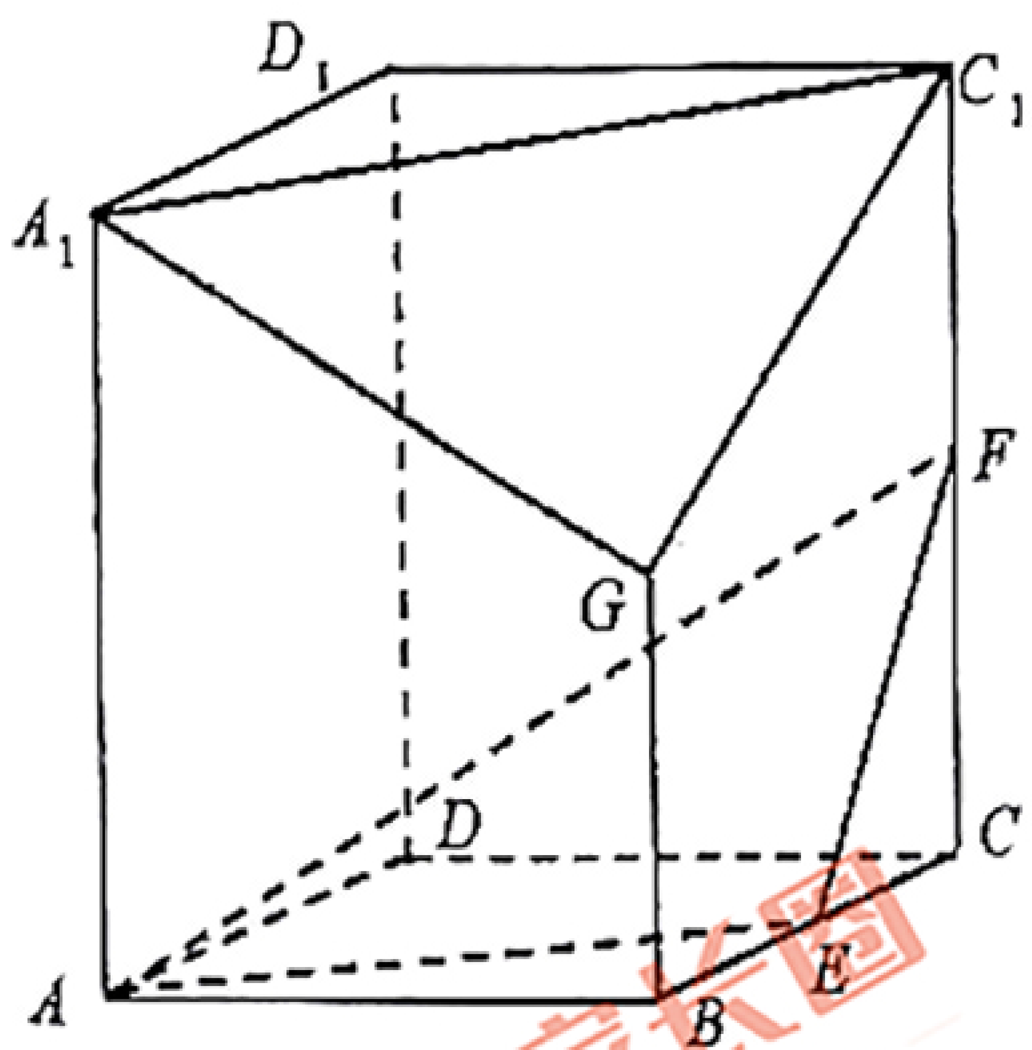
10．若$6^a=2$，$6^b=3$，则(　　)

A．$\frac{b}{a}>1$　　B．$ab<\frac{1}{4}$　　C．$a^2+b^2<\frac{1}{2}$　　D．$b-a>\frac{1}{5}$

11．已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过F且斜率为$2\sqrt{2}$的直线交抛物线C于A、B两点，其中点A在第一象限，若$|AF|=3$，则下列说法正确的是(　　)

A．$p=1$　　B．$|BF|=\frac{3}{2}$　　C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$　　D．以AF为直径的圆与y轴相切

12．在如图所示的几何体中，底面$ABCD$是边长为4的正方形，AA_1，BG，CC_1，DD_1均与底面$ABCD$垂直，且$AA_1=CC_1=DD_1=2BG=4\sqrt{3}$，点$E$，$F$分别为线段$BC$，$CC_1$的中点，则下列说法正确的是(　　)



A．直线A_1G与$\triangle AEF$所在平面相交

B．三棱锥C_1-BCD的外接球的表面积为80π

C．直线GC_1与直线AE所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{35}}{35}$

D．二面角C_1-AD-C中，$N\in$平面C_1AD，$M\in$平面BAD，P，Q为棱AD上不同两点，$MP\perp AD$，$NQ\perp AD$，若$MP=PQ=2$，$NQ=1$，则$MN=\sqrt{7}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．若$2,a,b,c,9$成等差数列，则$c-a=$________.

14．过点$P(1,1)$的弦AB将圆$x^2+y^2=4$的圆周分成两段圆弧，要使这两段弧长之差最大，则$|AB|=$______.

15．函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$的非负零点按照从小到大的顺序分别记为$x_1$，$x_2$，…，$x_n$，….，若$x_3-x_2=\frac{\pi}{2}$，则$x_n$的值可以是______.（写出符合条件的一个值即可）

16. 已知点D在线段AB上，CD是ΔABC的角平分线，E为CD上一点，且满足

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)(\lambda>0)，|\overrightarrow{CA}|-|\overrightarrow{CB}|=6，|\overrightarrow{BA}|=14，设\overrightarrow{BA}=\vec{a}，$$

则$\overrightarrow{BE}$在$\vec{a}$上的投影向量为____________(结果用$\vec{a}$表示).

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n+2n-5$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=\log_2(a_{n+1}-2)$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

18.（本小题满分 12 分）

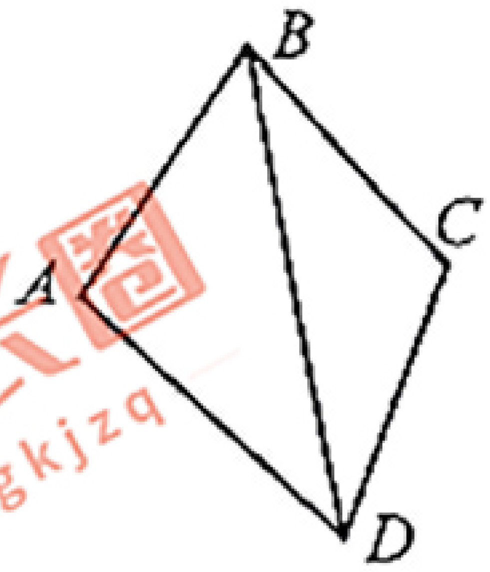
平面多边形中，三角形具有稳定性，而四边形不具有这一性质。如图所示，四边形$ABCD$的顶点在同一平面上，已知$AB=BC=CD=2$，$AD=2\sqrt{3}$.

（1）当BD长度变化时，$\sqrt{3}\cos A-\cos C$是否为一个定值？

若是，求出这个定值；若否，说明理由。

（2）记ΔABD与ΔBCD的面积分别为S_1和S_2，

请求出$S_1{}^2+S_2{}^2$的最大值.

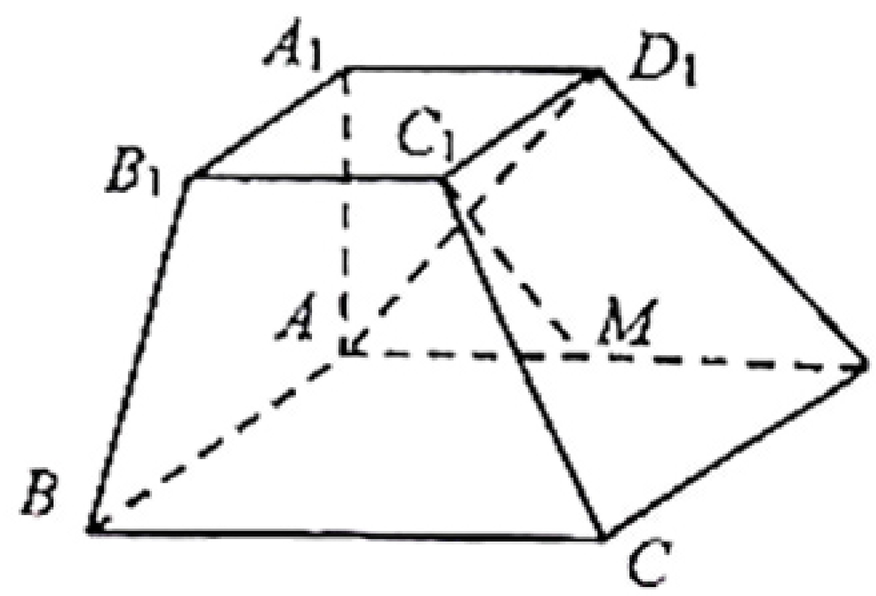


19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是菱形，$AA_1=A_1B_1=1$，$AB=2$，$\angle ABC=60°$，$AA_1\perp$平面$ABCD$.

（1）若点M是AD的中点，求证：C_1M //平面AA_1B_1B；

（2）棱BC上是否存在一点E，使得二面角$E-AD_1-D$的余弦值为$\frac{1}{3}$？若存在，求线段CE的长；若不存在，请说明理由.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+a}{e^x}$.

（1）当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（2）当 $x\geq 0$ 时，不等式 $f(x)\leq 2$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$，且双曲线 C 右支上一动点 $P(x_0,y_0)$ 到两条渐近线 l_1，l_2 的距离之积为 $\dfrac{4b^2}{5}$.

（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）设直线 l 是曲线 C 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线，且 l 分别交两条渐近线 l_1，l_2 于 M 、N 两点，O 为坐标原点，求 ΔMON 的面积.

22 .（本小题满分 12 分）

为了避免就餐聚集和减少排队时间，某校开学后，食堂从开学第一天起，每餐只推出即点即取的米饭套餐和面食套餐. 已知某同学每天中午会在食堂提供的两种套餐中选择，已知他第一天选择米饭套餐的概率为 $\dfrac{2}{3}$，而前一天选择了米饭套餐后一天继续选择米饭套餐的概率为 $\dfrac{1}{4}$，前一天选择面食套餐后一天继续选择面食套餐的概率为 $\dfrac{1}{2}$，如此往复.

（1）求该同学第二天中午选择米饭套餐的概率；

（2）记该同学第 n 天选择米饭套餐的概率为 P_n，

(i) 证明：$\left\{P_n-\dfrac{2}{5}\right\}$ 为等比数列；

(ii) 证明：当 $n\geq 2$ 时，$P_n\leq\dfrac{5}{12}$.