

“皖南八校”2022 届高三第一次联考

数 学(文科)

“皖八”理事会(18校) 南陵中学

2021.10

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围:第一章《集合与常用逻辑用语》,第二章《函数、导数及其应用》,第三章《三角函数、解三角形》,第四章《平面向量与复数》。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | 2x + 1 < 3\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$
C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $\{-2, 1, 0, 1, 2\}$
2. 复数 $z = i(i + \frac{1}{i^2})$ (i 为虚数单位)在复平面上对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$ ”的否定是
A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$
B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 \leq 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 \geq 0$
D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 < 0$
4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x - 1, & x \geq 1 \\ f(x+1), & x < 1 \end{cases}$, 则 $f(-1) =$
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 若向量 $a = (1, 2)$, $b = (3, -2)$, 则 $a \cdot (a + 2b) =$
A. 3 B. -3 C. 8 D. 13

【第 26 届“皖八”高三 1 联·数学 第 1 页(共 4 页) 文科】 HD-221001C

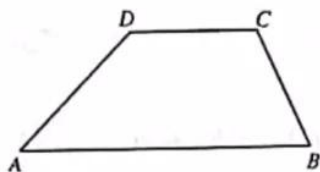
5. “ $|a| \neq 3$ ”是“ $a \neq 3$ ”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 已知函数 $f(x) = \cos(12x + \frac{\pi}{3})$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 4 倍, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到的函数的一个对称中心是
- A. $(\frac{\pi}{18}, 0)$ B. $(\frac{\pi}{9}, 0)$ C. $(\frac{2\pi}{9}, 0)$ D. $(\frac{37\pi}{288}, 0)$
8. 函数 $f(x) = \frac{x \cdot 2^x - 1 + x}{2^x + 1}$, $a = f(\lg 3)$, $b = f(\ln \frac{1}{2})$, $c = f(2^{\frac{1}{2}})$, 则 a, b, c 的大小关系为
- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$
9. 1471 年德国数学家米勒向诺德尔教授提出一个问题: 在地球表面的什么部位, 一根垂直的悬杆呈现最长(即视角最大, 视角是指由物体两端射出的两条光线在眼球内交叉而成的角), 这个问题被称为米勒问题, 诺德尔教授给出解答, 以悬杆的延长线和水平地面的交点为圆心, 悬杆两端点到地面的距离的积的算术平方根为半径在地面上作圆, 则圆上的点对悬杆视角最大. 米勒问题在实际生活中应用十分广泛. 某人观察一座山上的铁塔, 塔高 90 m, 山高 160 m, 此人站在对塔“最大视角”(忽略人身高)的水平地面位置观察此塔, 求此时“最大视角”的正弦值为
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{9}{41}$ C. $\frac{16}{25}$ D. $\frac{9}{16}$
10. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x-1)$ 关于 $(1, 0)$ 中心对称, $f(x+1)$ 是偶函数, 且 $f(-\frac{3}{2}) = 1$, 则 $f(\frac{9}{2})$ 的值为
- A. 0 B. -1 C. 1 D. 无法确定
11. 设单位向量 a 与非零向量 b 的夹角是 $\frac{2\pi}{3}$, 且 $|a-b| = \sqrt{3}|a|$, 则 $|a-b|$ 的最小值为
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1
12. 已知函数 $f(x) = (3a)^x - x^{3a}$ ($a > 1$), 当 $x \geq 2e$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为
- A. $(\frac{e}{3}, +\infty)$ B. $[\frac{2e}{3}, +\infty)$
C. $(1, e)$ D. $(1, \frac{2e}{3}]$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 设曲线 $y=ax+e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=2x+1$, 则 $a=$ _____.

14. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$ _____.

15. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel CD$, $AB=33$, $CD=21$, $AD=14$, $BC=10$, $\angle A, \angle B$ 均为锐角, 则对角线 $BD=$ _____.



16. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right) & (-2\pi\leq x\leq 0) \\ |\ln x-1| & (x>0) \end{cases}$, 若方程 $f(x)=m$ 恰有 4 个不同的实数解 a, b, c, d ,

且 $a<b<c<d$, 则 $\frac{cd}{a+b}=$ _____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

若平面向量 a, b 满足 $a=(3,3)$, $|b|=2$.

(I) 若 $a\parallel b$, 求 b 的坐标.

(II) 若 $|a+2b|=\sqrt{58}$, 求 a 与 b 的夹角.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ [$A, \omega>0, \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$], 其图像相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

且 $f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{6}\right)=A$.

(I) 求 $f(x)$;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right)$ 上的单调递增区间.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \lg \frac{x-a}{x-a-3}$ 的定义域为 A , 函数 $g(x) = 2^{2x} - 2^{x+1} + 3$ 的值域为 B .

(I) 当 $a=1$ 时, 求 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$;

(II) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sqrt{2} \cdot c \cdot \sin \left(A + \frac{\pi}{4} \right) = b$.

(I) 求角 C ;

(II) 当 $c=1, a+b=\sqrt{2}+1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \log_2(a-x)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 若对任意的 $m \in [-2, 2]$, 都有不等式 $f(x^2 - mx + m) + f(2x^2 - mx + 2) < 0$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - e$.

(I) 当 $a=1$ 时, 讨论函数 $g(x) = f(x) - (e-1)x$ 的单调性;

(II) 当 $a > 1$ 时, 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2 - e$.

“皖南八校”2022 届高三第一次联考·数学(文科)

参考答案、提示及评分细则

1. B 解不等式 $2x+1 < 3$ 得 $x < 1$, 即 $B = \{x | x < 1\}$, 所以 $A \cap B = \{-2, -1, 0\}$. 故选 B.
2. C $z = i(i + \frac{1}{i^2}) = -1 - i$, 所以复数 z 在复平面上对应的点位于第三象限. 故选 C.
3. B 因为全称命题的否定是特称命题, 所以命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$ ”的否定是: $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 \leq 0$. 故选 B.
4. A 由题意 $f(-1) = f(-1+1) = f(0) = f(0+1) = f(1) = -1$, 故选 A.
5. A 由题意, 向量 $a = (1, 2), b = (3, -2)$, 则 $a + 2b = (7, -2)$, 所以 $a \cdot (a - b) = 7 - 4 = 3$. 故选 A.
6. A $|a| \neq 3 \Leftrightarrow a \neq 3$ 且 $a \neq -3$, 所以“ $|a| \neq 3$ ”是“ $a \neq 3$ ”的充分不必要条件, 故选 A.
7. C 函数 $f(x) = \cos(12x + \frac{\pi}{3})$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 4 倍, 得到图象的解析式为 $y = \cos(3x + \frac{\pi}{3})$, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到图象的解析式为 $y = \cos(3x - \frac{\pi}{6})$, 令 $3x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=0$ 时, $x = \frac{2\pi}{9}$, 所以 $(\frac{2\pi}{9}, 0)$ 是函数 $y = \cos(3x - \frac{\pi}{6})$ 的一个对称中心. 故选 C.
8. B $\because f(x) = \frac{x \cdot 2^x - 1 + x}{2^x + 1} = x - \frac{1}{2^x + 1}$, 易知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 因为 $0 = \lg 1 < \lg 3 < \lg 10 = 1, \ln \frac{1}{2} < \ln 1 = 0, 2^{\frac{1}{3}} > 2^0 = 1$, 所以 $2^{\frac{1}{3}} > \lg 3 > \ln \frac{1}{2}$, 所以 $f(2^{\frac{1}{3}}) > f(\lg 3) > f(\ln \frac{1}{2})$, 即 $c > a > b$. 故选 B.
9. B 由米勒问题的解答可知, 此人应站在离塔水平距离为 $l = \sqrt{160 \times 250} = 200$ m 处观察, 设此时视角为 θ , 塔底离地面高度为 n , 塔顶离地面高度为 m , 则 $l = \sqrt{mn}$ 则 $\tan \theta = \frac{\frac{m}{l} - \frac{n}{l}}{1 + \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{l}} = \frac{l(m-n)}{l^2 + mn} = \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}$, 故 $\sin \theta = \frac{m-n}{m+n} = \frac{90}{250+160} = \frac{9}{41}$.
10. B 由题意可得 $f(x)$ 是奇函数, 且关于直线 $x=1$ 对称, 从而 $f(x)$ 的周期 $T=4, f(\frac{9}{2}) = f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = -f(-\frac{3}{2}) = -1$.
11. B 由 $|a-b| = \sqrt{3}|a|$ 可得, $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 3a^2$, 且 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}|a| \cdot |b|$, 从而 $|a| = |b|$, $\therefore |a - tb| = \sqrt{|a - tb|^2} = \sqrt{(a)^2 - 2ta \cdot b + t^2 (b)^2} = \sqrt{t^2 + t + 1} = \sqrt{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, 当且仅当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $|a - tb|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 答案选 B.

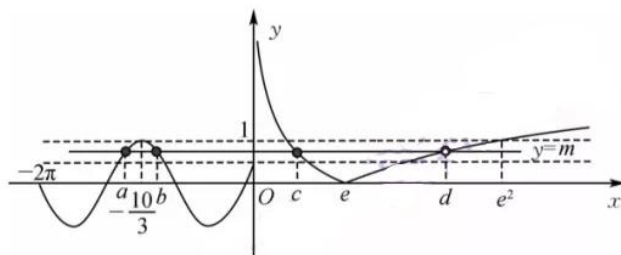
12. D $f(x) \geq 0$ 即 $(3a)^x \geq x^{3a}$, 则 $x \ln(3a) \geq 3a \ln x$, 则 $\frac{\ln(3a)}{3a} \geq \frac{\ln x}{x}$, 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x} (x \geq 1)$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
 $(x \geq 1)$, 当 $x \in (1, e)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, $\therefore a > 1$,
 $\therefore 3a > 3 > e$, 又 $g(3a) \geq g(x)$, 所以 $3a \leq x (x \geq 2e)$ 恒成立, 故 $a \in (1, \frac{2e}{3}]$.

13. 1 对函数 $y = ax + e^x$ 求导得 $y' = a + e^x$, 由已知可得 $y'|_{x=0} = a + 1 = 2$, 解得 $a = 1$.

14. $\frac{7}{25}$ 因为 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{12}) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = \cos[2(\alpha + \frac{\pi}{12})] = 1 - 2\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{12}) = -\frac{7}{25}$.

15. 25 过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AB 于点 E , 则 $DE = 10$, $AE = 12$, $AD = 14$. 由余弦定理得 $\cos A = \frac{14^2 + 12^2 - 10^2}{2 \times 14 \times 12} = \frac{5}{7}$, 在 $\triangle ABD$ 中, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = 625$, 解得 $BD = 25$.

16. $-\frac{3e^2}{20}$ 如图, 易知 $\frac{1}{2} < m < 1$, a, b 关于直线 $x = -\frac{10}{3}$ 对称, 所以 $a + b = -\frac{20}{3}$, 又 $0 < c < e < d$ 且 $|\ln c - 1| = |\ln d - 1|$, 所以 $1 - \ln c = \ln d - 1$, 所以 $\ln cd = \ln c + \ln d = 2$, 所以 $cd = e^2$, 从而 $\frac{cd}{a+b} = -\frac{3e^2}{20}$.



17. 解: (I) 设 $\mathbf{b} = (x, y)$, $\therefore \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 所以 $x = y$. ① 2分

又 $\because |\mathbf{b}| = 2$, $\therefore x^2 + y^2 = 4$. ②

由①、②, 解得 $x = y = \sqrt{2}$ 或 $x = y = -\sqrt{2}$, 4分

所以 \mathbf{b} 的坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 5分

(II) 由 $\mathbf{a} = (3, 3)$ 可知 $|\mathbf{a}| = 3\sqrt{2}$, 6分

由 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{58}$ 可得 $\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2 = 58$, 即 $18 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 16 = 58$, 解得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6$, 8分

设 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $\because \theta \in [0, \pi]$, $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ 10分

18. 解: (I) $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$ 2分

$f(\frac{\pi}{6}) = A \sin(\frac{2\pi}{6} + \varphi) = A$, 则 $\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = 1$, $\therefore \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$, 4分

又 $f(0) = A \sin \varphi = 1$, 则 $A = 2$,

- 故 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 6分
- (II) $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right)$, 则 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right)$, 8分
- 当 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}\right)$, 即 $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{12}\right)$, 10分
- 函数 $f(x)$ 单调递增, 故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right)$ 上的单调递增区间为 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{12}\right)$ 12分
19. (I) 由 $\frac{x-a}{x-a-3} > 0$, 解得: $x < a$ 或 $x > a+3$, 即 $A = (-\infty, a) \cup (a+3, +\infty)$,
- 由于 $g(x) = 2^{2x} - 2^{x+1} + 3 = (2^x - 1)^2 + 2 \geq 2$, $\therefore B = [2, +\infty)$ 4分
- 当 $a=1$ 时, $A = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$,
- $\therefore \complement_{\mathbf{R}} A = [1, 4]$, $\therefore (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = [2, 4]$ 6分
- (II) 依题可知, B 是 A 的真子集, 即 $[2, +\infty) \subsetneq (-\infty, a] \cup (a+3, +\infty)$ 9分
- 所以 $a+3 < 2$, 解得: $a < -1$,
- 所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1)$ 12分
20. 解: (I) 由题意可得: $\sqrt{2}c\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos A\right) = b$, 2分
- 再由正弦定理得 $\sin C \sin A + \sin C \cos A = \sin B = \sin(\pi - A - C) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$, 即 $\sin C \sin A = \sin A \cos C$ 4分
- 又 $\sin A \neq 0$, 所以 $\tan C = 1$, 又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 6分
- (II) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, $\therefore 1 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab = (a+b)^2 - (2+\sqrt{2})ab$, 8分
- 得 $ab = \sqrt{2}$, 10分
- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}$ 12分
21. 解: (I) 依题可知 $f(0) = 0$, 解得 $a = 1$, 所以当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \log_2(1-x)$, 2分
- 设 $x > 0$, 则 $-x < 0$, 所以 $f(-x) = \log_2(1+x)$,
- 又 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$,
- 即 $-f(x) = \log_2(1+x)$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = -\log_2(1+x)$, 4分
- 综上所述, $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x) & (x \leq 0) \\ -\log_2(1+x) & (x > 0) \end{cases}$ 5分
- (II) 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \log_2(1-x)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减,
- 又 $\because f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

从而 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 7 分

由 $f(x^2 - mx + m) + f(2x^2 - mx + 2) < 0$,

可得 $f(x^2 - mx + m) < -f(2x^2 - mx + 2) = f(-2x^2 + mx - 2)$, 9 分

又 $\because f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

$\therefore x^2 - mx + m > -2x^2 + mx - 2$, 即 $3x^2 - 2mx + m + 2 > 0$ 对任意的 $m \in [-2, 2]$ 恒成立,

则 $\begin{cases} 3x^2 + 4x > 0 \\ 3x^2 - 4x + 4 > 0 \end{cases}$, 解得 $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (0, +\infty)$ 12 分

22. 解: (I) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x - \ln x - e$, $g(x) = e^x - \ln x - e - (e-1)x$

$g'(x) = e^x - \frac{1}{x} - e + 1$, 令 $h(x) = g'(x)$, 2 分

$h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, 故 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $g'(1) = 0$, 故 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增. 5 分

(II) 当 $a > 1, x > 0$ 时, $ae^x > e^x$, 要证 $f(x) > 2 - e$,

只需证 $e^x - \ln x - e > 2 - e$, 即证 $e^x - \ln x > 2$, 7 分

令 $g(x) = e^x - \ln x - 2$, 则 $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

由 (I) 知 $g'(x)$ 单调递增, 且在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 存在唯一零点 x_0 , 即 $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$ 9 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x)$ 单调递减, 当 $(x_0, +\infty)$ 时, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x) \geq g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 = e^{x_0} - \ln \frac{1}{e^{x_0}} - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 0$, 11 分

故当 $a > 1, x > 0$ 时, $f(x) > 2 - e$ 12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

