天一大联考
2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(四)
文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. **答案** C

命题意图 本题考查集合的交运算.

解析 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<1$ 或 $x>1\}$.

2. **答案** A

命题意图 本题考查复数的四则运算.

解析 $\bar{z}=\dfrac{11+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{15-20\mathrm{i}}{5}=3-4\mathrm{i}$,则 $z=3+4\mathrm{i}$.

3. **答案** D

命题意图 本题考查极值点的概念以及充分必要条件的判断.

解析 由极值点的定义,若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点,则有 $f'(x_0)=0$,而由 $f'(x_0)=0$ 不一定推得 x_0 为 $f(x)$ 的极值点,例如 $f(x)=x^3$,故"$f'(x_0)=0$"是"x_0 是 $f(x)$ 的极值点"的必要不充分条件.

4. **答案** A

命题意图 本题考查平面向量的运算.

解析 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{3+4\times\sqrt{3}\times1\times\cos\dfrac{5\pi}{6}+4\times1^2}=1$.

5. **答案** C

命题意图 本题考查奇函数的概念.

解析 因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-4)=-f(4)$,又 $f(4)=\sqrt{4}-4=-2$,所以 $f(-4)=2$.

6. **答案** A

命题意图 本题考查三角恒等变换.

解析 由题意 $\dfrac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}=1-\tan\theta$,即 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$,$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\theta}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=3$.

7. **答案** B

命题意图 本题考查抛物线的性质.

解析 设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right)$,$\tan\angle AMO=k_{AM}=\dfrac{y_1-0}{\dfrac{y_1^2}{4}+1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,解得 $y_1=\sqrt{2}$ 或 $y_1=2\sqrt{2}$,所以 $A\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ 或 $A(2,2\sqrt{2})$,又 $F(1,0)$,所以 $k_{AF}=\dfrac{\sqrt{2}-0}{\dfrac{1}{2}-1}=-2\sqrt{2}$ 或 $k_{AF}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{2-1}=2\sqrt{2}$,所以 $|k_{AF}|=2\sqrt{2}$.

8. **答案** D

命题意图 本题考查三棱柱的外接球.

解析 设该正三棱柱棱长为 x，底面三角形的外接圆半径为 r，则 $\frac{1}{2}\sin 60°\cdot x^2\cdot x=16\sqrt{3}$，$\therefore x=4$，则 $r=\frac{4}{\sqrt{3}}$. 设三棱柱的外接球 O 半径为 R，则 $R^2=r^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{16}{3}+4=\frac{28}{3}$，$S_{表}=4\pi R^2=4\pi\times\frac{28}{3}=\frac{112}{3}\pi$.

9. **答案** C

命题意图 本题考查回归分析.

解析 由题意，$y=e^{1+at}$ 两边取自然对数得 $\ln y=1+at$，令 $u=\ln y$，则 $u=1+at$. $\bar{u}=(\ln y_1+\ln y_2+\ln y_3)\times\frac{1}{3}=2$，$\bar{t}=(t_1+t_2+t_3)\times\frac{1}{3}=2$，$\because$ 回归直线必过样本点的中心，$\therefore 2=2a+1$，得 $a=\frac{1}{2}$，$\therefore u=1+\frac{t}{2}$，则 $y=e^{1+\frac{t}{2}}$. 当 $t=6$ 时，$y=e^4$.

10. **答案** B

命题意图 本题考查函数零点问题.

解析 易知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，$f'(x)=x^2-\frac{1}{x^2}=\frac{x^4-1}{x^2}$，令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减，令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>1$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(-1)=-\frac{10}{3}<0$，易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有零点；当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(1)=-\frac{2}{3}<0$，且 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{82}{81}>0$，$f(2)=\frac{7}{6}>0$，可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点. 综上所述，$f(x)$ 的零点个数为 2.

11. **答案** C

命题意图 本题考查解三角形.

解析 $\because A=2B$，$\therefore \sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$ 且 $B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$\sin C=\sin(A+B)=\sin 3B=3\sin B-4\sin^3 B$，由正弦定理可得 $\frac{3a-c}{b}=\frac{3\sin A-\sin C}{\sin B}=\frac{6\sin B\cos B-3\sin B+4\sin^3 B}{\sin B}=6\cos B+4(1-\cos^2 B)-3=-4\cos^2 B+6\cos B+1$，令 $\cos B=t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则 $\frac{3a-c}{b}=-4t^2+6t+1$，由二次函数性质知 $-4t^2+6t+1\in\left(3,\frac{13}{4}\right]$，$\therefore \frac{3a-c}{b}\in\left(3,\frac{13}{4}\right]$.

12. **答案** B

命题意图 本题考查双曲线的性质和离心率的求法.

解析 不妨设点 P 在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，由题可知 $A(-a,0)$，$\therefore k_{AB}=\frac{b}{2a}$，$\therefore l_{AB}:y=\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2}$，由 $\begin{cases}y=\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2},\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_P=a,\\ y_P=b,\end{cases}$ $\therefore P(a,b)$，同理 $Q\left(-\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$，$\therefore PQ$ 的中点为 $\left(\frac{a}{3},\frac{2b}{3}\right)$，$PQ$ 的垂直平分线方程为 $y-\frac{2b}{3}=-\frac{2a}{b}\left(x-\frac{a}{3}\right)$，将 $\begin{cases}y=0,\\ x=a\end{cases}$ 代入整理得 $\frac{b^2}{a^2}=2$，则 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $\frac{3}{5}$

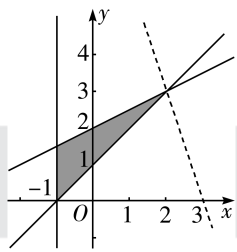
命题意图 本题考查几何概型的计算.

解析 在区间$[-2,3]$上随机取一个数x,若$|x|>1$,则$x\in[-2,-1)\cup(1,3]$,所以$|x|>1$的概率为$\frac{(-1+2)+(3-1)}{3+2}=\frac{3}{5}$.

14. **答案** 9

命题意图 本题考查线性规划.

解析 根据不等式组作出可行域如图中阴影部分所示,当目标函数表示的直线经过点$(2,3)$时,$z=3x+y$取得最大值9.



15. **答案** $-\sqrt{3}$

命题意图 本题考查三角函数的图象和性质.

解析 由图可知$A=2$,$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,$\therefore T=\pi$,$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.由$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,及$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,得$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,$\therefore f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,$\therefore g(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$,$\therefore g(0)=2\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

16. **答案** $\frac{2}{3}$

命题意图 本题考查导数的应用.

解析 设圆锥的底面半径为R,圆锥的轴截面为等腰三角形,底边长为$2R$,设其底角为α,则圆锥的高为$R\tan\alpha$,圆锥的体积为$\frac{\pi}{3}R^3\tan\alpha$.设圆锥内接圆柱的底面半径为$r$,高为$h$,则$\frac{r}{R}=\frac{R\tan\alpha-h}{R\tan\alpha}$,即$h=(R-r)\tan\alpha$,则圆柱的体积为$\pi r^2h=\pi r^2(R-r)\tan\alpha=\pi(Rr^2-r^3)\tan\alpha$,$r\in(0,R)$.圆柱与圆锥体积之比为$3\left(\frac{r^2}{R^2}-\frac{r^3}{R^3}\right)$,设$t=\frac{r}{R}(0<t<1)$,$f(t)=t^2-t^3$,则$f'(t)=2t-3t^2=t(2-3t)$.由$f'(t)=0$,得$t=\frac{2}{3}$,当$0<t<\frac{2}{3}$时,$f'(t)>0$,当$\frac{2}{3}<t<1$时,$f'(t)<0$,所以当$t=\frac{2}{3}$时,$f(t)$取得最大值,即圆柱与圆锥体积之比最大,此时$\frac{r}{R}=\frac{2}{3}$.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查数列求通项和数列求和.

解析 (Ⅰ)$a_1=S_1=\frac{1-5}{2}=-2$, ……(1分)

当$n\geqslant2$时,有$S_n=\frac{n^2-5n}{2}$,$S_{n-1}=\frac{(n-1)^2-5(n-1)}{2}$, ……(2分)

两式相减得$a_n=\frac{1}{2}[n^2-5n-(n-1)^2+5(n-1)]=n-3(n\geqslant2)$, ……(4分)

当$n=1$时,$a_1=-2$符合上式, ……(5分)

故$a_n=n-3$. ……(6分)

(Ⅱ)设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n,

则 $T_{30}=(b_1+b_2+\cdots+b_{10})+(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20})+(b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{30})$.

由题意得 $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=S_{10}$, …………………………………………………………………………（8 分）

$b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}=2(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=2S_{10}$, ……………………………………………………………………（9 分）

$b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{30}=2(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20})=2\times2S_{10}=4S_{10}$, ………………………………………………（10 分）

$\therefore T_{30}=7S_{10}=\frac{7}{2}(10^2-50)=175$. ……………………………………………………………………………………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查频率分布直方图和独立性检验.

解析 （Ⅰ）依题意有$(1.5+2.5+a+2.0+0.8+0.2)\times0.1=1$,得 $a=3.0$. ……………………………………………（2 分）

$\bar{x}=0.35\times0.15+0.45\times0.25+0.55\times0.30+0.65\times0.20+0.75\times0.08+0.85\times0.02=0.537$. ………（5 分）

（Ⅱ）依题意作 2×2 列联表：

	降价	非降价	总计
不低于 0.6 万元	18	12	30
低于 0.6 万元	12	58	70
总计	30	70	100

………（8 分）

$K^2=\frac{100\times(18\times58-12\times12)^2}{30\times70\times70\times30}\approx18.367$. ……………………………………………………………（10 分）

因为 $18.367>5.024$,所以有 97.5% 的把握认为该商品的日销售收入不低于 0.6 万元与该日是否降价有关.

………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明,以及点到面距离的求法.

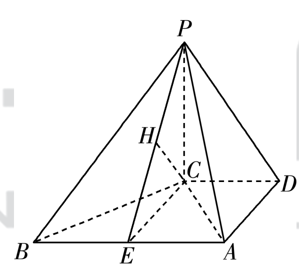
解析 （Ⅰ）如图,连接 AC,

$\because PA=PB$, $\angle APC=\angle BPC$, $PC=PC$, $\therefore\triangle PAC\cong\triangle PBC$, ……………………………………………（2 分）

$\therefore\angle PCA=\angle PCB=90^\circ$,即 $PC\perp AC$. ………………………………………………………………………（3 分）

$\because PC\perp BC$, $AC\cap BC=C$, $\therefore PC\perp$平面 $ABCD$, ………………………………………………………………（4 分）

又 $AD\subset$平面 $ABCD$, $\therefore PC\perp AD$. ……………………………………………………………………………………（5 分）



（Ⅱ）取 AB 的中点 E,连接 PE, CE.

$\because PA=PB$, $\therefore PE\perp AB$,由（Ⅰ）知 $AC=BC$, $\therefore CE\perp AB$,

$\because PE\cap CE=E$, $\therefore AB\perp$平面 PCE, ……………………………………………………………………………（6 分）

又 $AB\subset$平面 PAB, $\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 PCE. ……………………………………………………………………（7 分）

过 C 作 $CH\perp PE$ 于 H,则 $CH\perp$平面 PAB ,由条件知 $CH=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………（8 分）

易知 $PC\perp CE$,设 $CE=m$,则 $PE=\sqrt{3+m^2}$,

由$\frac{1}{2}PC\cdot CE=\frac{1}{2}PE\cdot CH$,即$\sqrt{3}m=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3+m^2}$,得 $m=\sqrt{3}$, $\therefore CE=\sqrt{3}$. ………………………（10 分）

$\because PD\perp AD, AD\perp PC, PC\cap PD=P, \therefore AD\perp$ 平面 PCD ，$\therefore AD\perp CD$，

又 $\because AB/\!/CD, \therefore AD\perp AB, \therefore$ 四边形 $AECD$ 为矩形，……………………………………………………（11 分）

$\therefore AD=CE=\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查导数的几何意义，以及函数与方程的综合问题.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=2x^2-2x+a$，………………………………………………………………………………（1 分）

由题意知 $f'(0)=a=-4$. …………………………………………………………………………………………（2 分）

所以 $f'(x)=2x^2-2x-4=2(x+1)(x-2)$，

则当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，当 $-1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，……………………………………………（4 分）

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,2)$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由 $f(x_0)=f(-1)$，得 $f(x_0)-f(-1)=0$，

即 $\frac{2}{3}[x_0^3-(-1)^3]-[x_0^2-(-1)^2]+a[x_0-(-1)]$

$=\frac{2}{3}(x_0+1)(x_0^2-x_0+1)-(x_0-1)(x_0+1)+a(x_0+1)$

$=\frac{1}{3}(x_0+1)(2x_0^2-5x_0+3a+5)=0$. ……………………………………………………………………（7 分）

根据已知，可得方程 $2x_0^2-5x_0+3a+5=0$ 在区间 $(0,2)$ 内仅有一个实根，……………………………（8 分）

设函数 $g(x)=2x^2-5x+3a+5$，其图象的对称轴为 $x=\frac{5}{4}\in(0,2)$，……………………………………（9 分）

所以只需 $\begin{cases}\Delta=25-8(3a+5)>0,\\ g(0)>0,\\ g(2)<0,\end{cases}$ 或 $\Delta=0$，解得 $-\frac{5}{3}<a<-1$ 或 $a=-\frac{5}{8}$，

即 a 的取值范围是 $\left(-\frac{5}{3},-1\right)\cup\left\{-\frac{5}{8}\right\}$. ……………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆方程和定直线的证明.

解析 （Ⅰ）设椭圆 C 的焦距为 $2c(c>0)$，

由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2}{3},\\ \frac{7}{a^2}+\frac{10}{9b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=5,\end{cases}$ ……………………………………………………（4 分）

$\therefore C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题可知 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $M'(-x_1,-y_1)$，设 $l_{MN}:x=my+n$.

联立 $\begin{cases}x=my+n,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(5m^2+9)y^2+10mny+5(n^2-9)=0$，

$\therefore y_1+y_2=\frac{-10mn}{5m^2+9}, y_1y_2=\frac{5(n^2-9)}{5m^2+9}$，……………………………………………………（6 分）

$\begin{cases}k_{AM'}=\frac{y_1}{x_1-3},\\ k_{BN}=\frac{y_2}{x_2-3},\end{cases}$ $\therefore l_{AM'}:y=\frac{y_1}{x_1-3}(x+3)$，$l_{BN}:y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$，…………………………（7 分）

又$\because$ 点 P 为直线 AM' 和 BN 的交点，$\therefore \begin{cases} \dfrac{x_1-3}{y_1}\cdot y_P = x_P+3, \\ \dfrac{x_2-3}{y_2}\cdot y_P = x_P-3, \end{cases}$ ………………………………（8 分）

故可得
$$2x_P = \left(\frac{x_1-3}{y_1}+\frac{x_2-3}{y_2}\right)y_P$$
$$=\left(\frac{my_1+n-3}{y_1}+\frac{my_2+n-3}{y_2}\right)y_P$$
$$=\left[2m+(n-3)\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}\right]y_P$$
$$=\left[2m+(n-3)\cdot\frac{-10mn}{5(n^2-9)}\right]y_P,$$

$\therefore x_P=\dfrac{3m}{n+3}y_P$，故 $l_{OP}:x=\dfrac{3m}{n+3}y$. ………………………………（10 分）

联立$\begin{cases} l_{OP}:x=\dfrac{3m}{n+3}y, \\ l_{MN}:x=my+n, \end{cases}$ 消去 y 得 $x_Q=-3$，………………………………（11 分）

因此，点 Q 位于定直线 $x=-3$ 上. ………………………………（12 分）

22. **命题意图**　本题考查极坐标与参数方程.

解析　（Ⅰ）$x^2=\dfrac{16t^2}{(4+t^2)^2}$，$y^2=\dfrac{4(4-t^2)^2}{(4+t^2)^2}$，

$\therefore x^2+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{16t^2+(4-t^2)^2}{(4+t^2)^2}=\dfrac{(4+t^2)^2}{(4+t^2)^2}=1$，

又 $y=\dfrac{8-2t^2}{4+t^2}=-2+\dfrac{16}{4+t^2}>-2$，

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(y\neq-2)$. ………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 P 到 l 的距离为 d.

令$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$得直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$，………………………………（6 分）

设 $P(\cos\alpha,2\sin\alpha)$，$\alpha\in[0,2\pi)$ 且 $\alpha\neq\dfrac{3\pi}{2}$，

则 $d=\dfrac{|\cos\alpha+2\sin\alpha-4|}{\sqrt2}=\dfrac{|\sqrt5\sin(\alpha+\varphi)-4|}{\sqrt2}$，其中 $\tan\varphi=\dfrac12$，………………………………（8 分）

$\therefore d$ 的取值范围是$\left[\dfrac{4\sqrt2-\sqrt{10}}{2},\dfrac{4\sqrt2+\sqrt{10}}{2}\right]$. ………………………………（10 分）

23. **命题意图**　本题考查不等式的证明.

解析　（Ⅰ）由题意知 $f(x)=\begin{cases} -4x, x<-\dfrac14, \\ 1, -\dfrac14\leqslant x<\dfrac14, \\ 4x, x\geqslant\dfrac14. \end{cases}$ ………………………………（2 分）

令 $f(x)=3$，得 $x=-\dfrac34$ 或 $\dfrac34$，………………………………（3 分）

结合图象可知$f(x)<3$的解集为$\left\{x \left| -\frac{3}{4}<x<\frac{3}{4}\right.\right\}$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意可知$\frac{2a}{a+2}+\frac{b}{b+1}=1$，$\therefore 2-\frac{4}{a+2}+1-\frac{1}{b+1}=1$，

$\therefore \frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}=2$. …………………………………………………………………………………（7 分）

令$m=a+2$，$n=b+1$，则$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}=2$，

$a+b=m+n-3=\frac{1}{2}(m+n)\left(\frac{4}{m}+\frac{1}{n}\right)-3=\frac{1}{2}\left(5+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\right)-3\geqslant\frac{1}{2}(5+4)-3=\frac{3}{2}$，

当且仅当$m=2n=3$，即$a=1$，$b=\frac{1}{2}$时等号成立. ……………………………………………………（10 分）

天一文化
TIANYI CULTURE