参考答案及解析

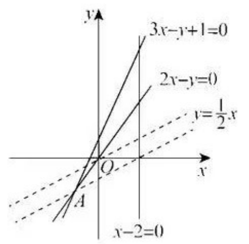
一、选择题

1. B 【解析】因为 $M=\{x|\sqrt{x}<2\}=\{x|0\leqslant x<4\}$，$N=\{x|-7<x<3\}$，所以 $M\cap N=\{x|0\leqslant x<3\}$. 故选B项.

2. D 【解析】因为 $z=1+\frac{1}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$，则 $\bar{z}^2-1=-1+2\mathrm{i}$. 故选 D 项.

3. A 【解析】易知 $f(1)=3$，又 $f'(x)=4x-\frac{1}{x^2}$，所以 $f'(1)=3$，所以曲线在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-3=3(x-1)$，即 $3x-y=0$. 故选 A 项.

4. C 【解析】作出可行域如图中阴影部分所示：

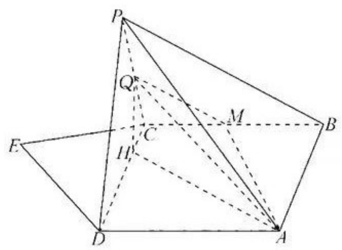


作出直线 $y=\frac{1}{2}x$ 并平移，由数形结合可知，当平移后的直线经过点 A 时，$z=-\frac{1}{2}x+y$ 取得最小值，联立 $\begin{cases}3x-y+1=0,\\2x-y=0,\end{cases}$ 解得 $A(-1,-2)$，所以 $z=-\frac{1}{2}x+y$ 的最小值为 $z_{\min}=-\frac{1}{2}\times(-1)-2=-\frac{3}{2}$. 故选 C 项.

5. B 【解析】令函数 $f(x)=\log_a(3^{|x|}+8)$，易知 $f(x)$ 为偶函数，因为 $3^{|x|}+8\geqslant 9$，所以要使关于 x 的不等式 $\log_a(3^{|x|}+8)\geqslant 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $a>1$，易知 $f(x)=\log_a(3^{|x|}+8)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，结合偶函数的性质可知 $f(x)_{\min}=f(0)=\log_a 9$，由题意可知 $\log_a 9\geqslant 2=\log_a a^2$，所以 $a^2\leqslant 9$，解得 $-3\leqslant a\leqslant 3$，则 $1<a\leqslant 3$. 故选 B 项.

6. D 【解析】将点 $(20,83.4)$ 代入线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x-4.6$，得 $83.4=20\hat{b}-4.6$，解得 $\hat{b}=4.4$，所以线性回归方程为 $\hat{y}=4.4x-4.6$，又 $\bar{x}=\frac{1}{6}\times(10+m+13+15+16+18)=\frac{72+m}{6}$，$\bar{y}=\frac{1}{6}\times(40+s+51+63+65+75)=\frac{294+s}{6}$，将点 $(\bar{x},\bar{y})$ 代入 $\hat{y}=4.4x-4.6$，得 $\frac{294+s}{6}=\frac{72+m}{6}\times 4.4-4.6$，所以 $4.4m-s=4.8$. 故选 D 项.

7. B 【解析】如图，取 BC 的中点 M，连接 MQ，则 $MQ/\!/BP$，所以 $\angle AQM$ 或其补角为异面直线 AQ 与 BP 所成的角. 设 $AB=2$，因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，且 $ABCD$ 为正方形，所以 $BC\perp$ 平面 PCD，又 $PC\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PC$，所以 $MQ=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，连接 AM，则 $AM=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，过 Q 作 $QH\perp CD$，则 $QH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，连接 AH，则 $AH=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$，所以 $AQ=\sqrt{\frac{25}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$，显然 $AQ^2=AM^2+MQ^2$，则 $AM\perp MQ$，所以 $\cos\angle AQM=\frac{MQ}{AQ}=\frac{\sqrt{14}}{7}$. 故选 B 项.



8. D 【解析】二项式 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$ 的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_7^r x^{7-2r}$，要使 $\left(\frac{a}{x^3}-x\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中的项为常数项，则 $7-2r=3$ 或 $7-2r=-1$，所以 $r=2$ 或 $r=4$，则展开式中的常数项为 $a\mathrm{C}_7^2-\mathrm{C}_7^4=-56$，解得 $a=-1$，所以 $-\left(\frac{1}{x^3}+x\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中的各项系数之和为 $-2\times 2^7=-256$. 故选 D 项.

9. D 【解析】由 $|AB|=|AF|$ 及抛物线的定义可知，$AB\perp l$，所以 $AB/\!/DF$，则四边形 $ABDF$ 是直角梯形，由 $\angle AFD=120^\circ$ 得 $\angle FAB=60^\circ$，所以 $\triangle ABF$ 为等边三角形，在 $\mathrm{Rt}\triangle BDF$ 中，$\angle FBD=30^\circ$，又 $|DF|=p$，所以 $|BF|=2p$，$|BD|=\sqrt{3}p$，即 $|AB|=2p$，由梯形 $ABDF$ 的面积为 $24\sqrt{3}$，得 $\frac{1}{2}(p+2p)\times\sqrt{3}p=24\sqrt{3}$，解得 $p=4$，则 C 的方程为 $y^2=8x$. 故选 D 项.

10. A 【解析】由题意可知 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{1}{2}T=\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，则 $f(x)=$

$4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，故 $g(x)=4\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，由图像可知，$\begin{cases}m>0,\\-m\geqslant-\frac{11\pi}{12},\\m>\frac{7\pi}{12},\end{cases}$解得 $\frac{7\pi}{12}<m\leqslant\frac{11\pi}{12}$. 故选 A 项.

11. C 【解析】设正六棱柱的底面边长为 a，侧棱长为 b，则 $12a+6b=48$，其中 a,b 为正数，则 $b=8-2a$，设正六棱柱的外接球的半径为 R，易知底面的外接圆的半径为 a，所以 $R^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2=\left(\frac{8-2a}{2}\right)^2+a^2=2a^2-8a+16=2(a-2)^2+8$，所以当 $a=2$ 时，R^2 取得最小值 8，$b=8-2a=4$，所以正六棱柱的侧面积为 $S=6\times2\times4=48\ \text{dm}^2$. 故选 C 项.

12. A 【解析】由 $f'(x)=g'(x+2)$，得 $f'(x)-g'(x+2)=0$，即 $[f(x)-g(x+2)]'=0$，设 $f(x)-g(x+2)=c$①，由 $f(x+1)-g(3-x)=3$，得 $f(x)-g(4-x)=3$②，①−②，得 $g(4-x)-g(x+2)=c-3$，令 $x=1$，则 $g(3)-g(3)=c-3=0$，所以 $c=3$，所以 $g(4-x)-g(x+2)=0$，则 $g(3-x)-g(x+3)=0$，即 $g(3-x)=g(x+3)$，所以 $g(x)$ 的图像关于直线 $x=3$ 对称. 又 $g(x+2)$ 为奇函数，所以 $g(-x+2)=-g(x+2)$，则 $g(-x+1)=-g(x+3)$，所以 $g(-x+1)=-g(3-x)$，则 $g(x+1)=-g(3+x)$，即 $g(x)=-g(2+x)$，所以 $g(x+4)=-g(2+x)=g(x)$，所以 4 为 $g(x)$ 的一个周期，又 $g(3)=2$，所以 $g(1)=-g(3)=-2$，又知 $g(2)=0$，则 $g(4)=g(2)=0$，所以 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=0$，$\sum\limits_{k=1}^{102}g(k)=25[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)]+g(1)+g(2)=-2$. 故选 A 项.

二、填空题

13. -10 【解析】由题意可知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4+m,-4)$，由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，得 $2(4+m)=-4\times3$，解得 $m=-10$.

14. 0.01(答案不唯一) 【解析】由正态分布性质可知，要使次品率不高于 0.3%，则正品率最低为 $1-0.3\%=99.7\%$，由 $P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)=99.7\%$，得 $P(80-3\sigma<\xi<80+3\sigma)=99.7\%$，由题意可知，$\begin{cases}80-3\sigma\geqslant79.94,\\80+3\sigma\leqslant80.06,\end{cases}$解得 $\sigma\leqslant0.02$，所以 σ 的一个值可以为 0.01.

15. $\sqrt{10}$ 【解析】连接 BF_2，因为线段 F_1B 的中点为 D，所以 $OD/\!/BF_2$，且 $|OD|=\frac{1}{2}|BF_2|$，连接 OA，因为过 F_1 作圆 E 的切线 F_1A，切点为 A，所以 $OA\perp F_1A$，则 $|F_1A|=\sqrt{|OF_1|^2-|OA|^2}=\sqrt{c^2-a^2}=b$，因为 $\angle F_1BF_2$ 为钝角，所以 $\angle F_1DO$ 为钝角，则 $|AD|=|F_1A|-|F_1D|=b-\frac{1}{2}|BF_1|$，由双曲线的定义可知，$|BF_1|-|BF_2|=2a$，由 $|OD|+|AD|=2a$，得 $\frac{1}{2}|BF_2|+b-\frac{1}{2}|BF_1|=2a$，所以 $b-\frac{1}{2}(|BF_1|-|BF_2|)=2a$，则 $b-\frac{1}{2}\times2a=2a$，即 $b=3a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+9a^2}{a^2}}=\sqrt{10}$.

16. $[4\sqrt{2}-1,5)$ 【解析】由 $c+b=2a\cos B$，及正弦定理得 $\sin C+\sin B=2\sin A\cos B$，即 $\sin(A+B)+\sin B=2\sin A\cos B$，整理得 $\sin(A-B)=\sin B$，所以 $A-B=B$ 或 $A-B+B=\pi$(舍去)，所以 $A=2B$，则 $C=\pi-3B$，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，则 $\frac{1}{2}<\cos^2B<\frac{3}{4}$，因为 $\sin C=\sin(\pi-3B)=\sin 3B=\sin B\cdot\cos 2B+\cos B\sin 2B=\sin B\cos 2B+2\sin B\cos^2B$，所以 $\frac{a^2c+8b^3}{a^2b}=\frac{c}{b}+\frac{8b^2}{a^2}=\frac{\sin C}{\sin B}+\frac{8\sin^2B}{\sin^2A}=\cos 2B+2\cos^2B+\frac{8\sin^2B}{4\sin^2B\cos^2B}=4\cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-1\geqslant2\sqrt{4\cos^2B\times\frac{2}{\cos^2B}}-1=4\sqrt{2}-1$，当且仅当 $4\cos^2B=\frac{2}{\cos^2B}$，即 $\cos^2B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号. 当 $\cos^2B=\frac{1}{2}$ 时，$4\cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-1=5$，当 $\cos^2B=\frac{3}{4}$ 时，$4\cos^2B+\frac{2}{\cos^2B}-1=\frac{14}{3}<5$，所以 $\frac{a^2c+8b^3}{a^2b}$ 的取值范围为 $[4\sqrt{2}-1,5)$.

三、解答题

(一)必考题

17. (1)证明：若选择①②，证明③成立.

由 $a_1+a_{n+1}=a_2+a_n$，得 $a_{n+1}-a_n=a_2-a_1$，

故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，　　(1 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，故 $a_2=a_1+d$，$S_1=a_1$，

$S_2=a_1+a_2=2a_1+d$，所以 $2a_1+d=4a_1$，

所以 $d=2a_1$，　　(2 分)

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times2a_1=n^2a_1$，

故 $\sqrt{S_n}=n\sqrt{a_1}$，　　(4 分)

所以 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n+2}}=n\sqrt{a_1}+(n+2)\sqrt{a_1}=2(n+1)\cdot\sqrt{a_1}=2\sqrt{S_{n+1}}$,

故 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-2}}=2\sqrt{S_{n+1}}$. (6 分)

若选择①③为条件,证明②成立.

由 $a_1+a_{n-1}=a_2+a_n$,得 $a_{n+1}-a_n=a_2-a_1$,

故数列$\{a_n\}$是等差数列, (1 分)

设数列$\{a_n\}$的公差为 d,$S_1=a_1$,$S_2=2a_1+d$,$S_3=3a_1+3d$,$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}$,$\sqrt{S_2}=\sqrt{2a_1+d}$,$\sqrt{S_3}=\sqrt{3(a_1+d)}$, (2 分)

因为 $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}=2\sqrt{S_2}$,即 $(\sqrt{a_1}+\sqrt{3(a_1+d)})^2=(2\sqrt{2a_1+d})^2$, (4 分)

整理可得 $d=2a_1$,所以 $a_2=a_1+d=3a_1$,

所以 $S_2=a_1+a_2=4a_1=4S_1$,故 $S_2=4S_1$. (6 分)

若选择②③为条件,证明①成立.

由题意可得 $S_2=4S_1=4a_1$,所以 $\sqrt{S_2}=2\sqrt{a_1}$, (1 分)

又 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n+2}}=2\sqrt{S_{n+1}}$,所以 $\sqrt{S_{n+2}}-\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_{n-1}}-\sqrt{S_n}$,

所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列, (2 分)

则数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差为 $d=\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}$,

所以 $\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=n\sqrt{a_1}$, (3 分)

所以当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$,当 $n=1$ 时上式也成立,

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(2n-1)a_1$. (4 分)

又 $a_{n+1}=(2n+1)a_1$,

所以 $a_1+a_{n+1}=2(n+1)a_1$, (5 分)

又 $a_2=3a_1$,所以 $a_2+a_n=2(n+1)a_1$,

故 $a_1+a_{n-1}=a_2+a_n$. (6 分)

(2)**解**:由(1)可知,数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=2$,公差 $d=4$ 的等差数列, (8 分)

所以 $S_n=2n^2$,$S_{n+1}=2(n+1)^2$,

所以 $\dfrac{1}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$, (10 分)

所以 $T_n=\dfrac{1}{\sqrt{S_1S_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{S_2S_3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{S_nS_{n-1}}}=\dfrac{1}{2}\times\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\dfrac{n}{2n+2}$. (12 分)

18. **解**:(1)X 的可能取值为$-2,0,3,4$, (1 分)

$P(X=-2)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{6}$,

$P(X=0)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$,

$P(X=3)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$,

$P(X=4)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$, (4 分)

故 X 的分布列为

X	-2	0	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

(5 分)

所以 $E(X)=-2\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{4}+4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{4}$. (6 分)

(2)由(1)知采用三局两胜制,小明获得冠军的概率为

$P_1=P(X=3)+P(X=4)=\dfrac{7}{12}$. (7 分)

采用五局三胜制,小明获得冠军的概率为 $P_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+2\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+C_2^1\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}\times C_2^1\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{8}$. (10 分)

因为 $P_1=\dfrac{7}{12}<P_2=\dfrac{5}{8}$, (11 分)

所以选择五局三胜制,小明获得冠军的机会更大. (12 分)

19. (1)**证明**:取 AC 的中点 G,连接 NG,DG,则 NG 为$\triangle ABC$ 的中位线,

所以 $NG\,/\!/\,BC$,且 $NG=\dfrac{1}{2}BC$, (1 分)

又 $DM\,/\!/\,BC$,且 $DM=\dfrac{1}{2}BC$,

所以 $NG\,/\!/\,DM$,且 $NG=DM$,

所以四边形 $DMNG$ 为平行四边形, (2 分)

所以 $MN\,/\!/\,DG$. (3 分)

因为 $MN\not\subset$平面 $ACDE$,$DG\subset$平面 $ACDE$,

故 $MN\,/\!/\,$平面 $ACDE$. (4 分)

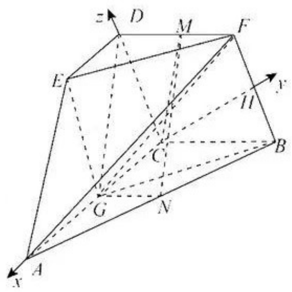
(2)连接 CM,在菱形 $BCDF$ 中,$\angle CBF=60^\circ$,

则 $CM\perp DF$,$CM=\sqrt{3}$.

在直角梯形 $ACDE$ 中,$AC\perp CD$,

所以 $DE\perp CD$,

因为平面 $BCDF\perp$ 平面 $ACDE$，平面 $BCDF\cap$ 平面 $ACDE=CD$，$DE\subset$ 平面 $ACDE$，
所以 $DE\perp$ 平面 $BCDF$，又 $CM\subset$ 平面 $BCDF$，
所以 $DE\perp CM$，
又 $DF\cap DE=D$，所以 $CM\perp$ 平面 DEF. （5 分）
由题意易得平面 $DEF//$ 平面 ABC，
连接 GE,GB，因为 $AC=2DE$，所以四边形 $CDEG$ 为平行四边形，易得四边形 $GEFB$ 为平行四边形，所以 $CGB\text{-}DEF$ 为三棱柱. （6 分）
设 $DE=m$，则 $AC=2m$，
所以三棱柱 $CGB\text{-}DEF$ 的体积 $V_1=S_{\triangle DEF}\times CM=\frac{1}{2}\times2\times m\times CM=\sqrt{3}m$.
连接 GF，则三棱锥 $F\text{-}ABG$ 的体积 $V_2=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABG}\times CM=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCG}\times CM=\frac{1}{3}\times S_{\triangle DEF}\times CM=\frac{\sqrt{3}}{3}m$. （7 分）
取 BF 的中点 H，连接 CH，则 $CH\perp CD$，$CH=\sqrt{3}$，由条件可知，$CH\perp$ 平面 $ACDE$，所以三棱锥 $F\text{-}AGE$ 的体积 $V_3=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AGE}\times CH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times m\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}m$， （8 分）
由多面体 $ABCDEF$ 的体积为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$，得 $\sqrt{3}m+\frac{\sqrt{3}}{3}m+\frac{\sqrt{3}}{3}m=\frac{10\sqrt{3}}{3}$，解得 $m=2$. （9 分）
由上可知，CA,CH,CD 两两互相垂直，以 C 为坐标原点，CA,CH,CD 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $C(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},-1)$，$D(0,0,2)$，$G(2,0,0)$，$\overrightarrow{AB}=(-4,\sqrt{3},-1,)$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CD}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{GD}=(-2,0,2)$， （10 分）
设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，
由 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-4x+\sqrt{3}y-z=0,\\ 2z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},4,0)$， （11 分）
设直线 MN 与平面 ABF 所成角为 θ，
所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{NM},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{19}}=\frac{\sqrt{114}}{38}$，
故直线 MN 与平面 ABF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{114}}{38}$. （12 分）

20. **解**：(1) 由题意可知，$a^2-b^2=1$， （1 分）
由椭圆的定义可知，$\triangle PQF_2$ 的周长为 $4a$，
所以 $4a=2\sqrt{5}b$，则 $2a=\sqrt{5}b$， （2 分）
解得 $a=\sqrt{5}$，$b=2$，
故 E 的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. （3 分）
(2) $\frac{1}{|F_1M|^2}+\frac{1}{|F_1N|^2}$ 的值为定值 $\frac{1}{16}$. （4 分）
理由如下：
先验证特殊情况，当直线 $PQ\perp x$ 轴时，将 $x=-1$ 代入椭圆的方程，不妨取 $P\left(-1,\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$，$Q\left(-1,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$，
又 $A(\sqrt{5},0)$，
所以直线 AP 的方程为 $y=-\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}(x-\sqrt{5})$，
将 $x=-5$ 代入直线 AP 的方程，得 $M(-5,4)$，同理 $N(-5,-4)$， （5 分）
所以 $k_{F_1M}\cdot k_{F_1N}=\frac{4}{-5+1}\times\frac{-4}{-5+1}=-1$，
则 $F_1M\perp F_1N$，所以 $|MN|^2=|F_1M|^2+|F_1N|^2$，
设直线 $x=-5$ 与 x 轴的交点为 H，则 $\frac{1}{|F_1M|^2}+\frac{1}{|F_1N|^2}=\frac{|MN|^2}{(|F_1M|\cdot|F_1N|)^2}=\frac{|MN|^2}{(|F_1H|\cdot|MN|)^2}=\frac{1}{|F_1H|^2}=\frac{1}{16}$. （6 分）
再考虑一般情况下，也有上述结论，设直线 PQ 的方程为 $x=my-1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，
联立 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(4m^2+5)y^2-8my-16=0$，
所以 $y_1+y_2=\frac{8m}{4m^2+5}$，$y_1y_2=-\frac{16}{4m^2+5}$， （7 分）
又直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-\sqrt{5}}(x-\sqrt{5})$，
令 $x=-5$，解得 $y=-\frac{(5+\sqrt{5})y_1}{x_1-\sqrt{5}}$，
所以 $M\left(-5,-\frac{(5+\sqrt{5})y_1}{x_1-\sqrt{5}}\right)$，

同理得 $N\left(-5,-\frac{(5+\sqrt{5})y_2}{x_2-\sqrt{5}}\right)$，

则$\overrightarrow{MF_1}=\left(4,\frac{(5+\sqrt{5})y_1}{x_1-\sqrt{5}}\right)$，$\overrightarrow{NF_1}=\left(4,\frac{(5+\sqrt{5})y_2}{x_2-\sqrt{5}}\right)$， （8分）

所以$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{NF_1}$

$=16+\frac{(5+\sqrt{5})y_1}{x_1-\sqrt{5}}\times\frac{(5+\sqrt{5})y_2}{x_2-\sqrt{5}}$

$=16+\frac{(5+\sqrt{5})^2y_1y_2}{(my_1-1-\sqrt{5})(my_2-1-\sqrt{5})}$

$=16+\frac{(5+\sqrt{5})^2y_1y_2}{m^2y_1y_2-(1+\sqrt{5})m(y_1+y_2)+(1+\sqrt{5})^2}$

$=16+\frac{(5+\sqrt{5})^2\times\left(-\frac{16}{4m^2+5}\right)}{m^2\left(-\frac{16}{4m^2+5}\right)-(1+\sqrt{5})m\times\frac{8m}{4m^2+5}+(1+\sqrt{5})^2}$

$=16+\frac{-16(5+\sqrt{5})^2}{-16m^2-8(1+\sqrt{5})m^2+(1+\sqrt{5})^2(4m^2+5)}$

$=16+\frac{-16(5+\sqrt{5})^2}{5(1+\sqrt{5})^2}=16-16=0$， （10分）

所以$\overrightarrow{MF_1}\perp\overrightarrow{NF_1}$，则$\angle MF_1N=90°$，

所以$|MN|^2=|F_1M|^2+|F_1N|^2$，

设直线 $x=-5$ 与 x 轴的交点为 H，则 $\frac{1}{|F_1M|^2}+\frac{1}{|F_1N|^2}=\frac{|MN|^2}{(|F_1M|\cdot|F_1N|)^2}=\frac{|MN|^2}{(|F_1H|\cdot|MN|)^2}=\frac{1}{|F_1H|^2}=\frac{1}{16}$.

综上，$\frac{1}{|F_1M|^2}+\frac{1}{|F_1N|^2}$的值为定值$\frac{1}{16}$. （12分）

21.(1)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当 $b=0$ 时，$f'(x)=\frac{2a}{x}-2x=\frac{2a-2x^2}{x}$. （1分）

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减； （2分）

当 $a>0$ 时，当 $x\in(0,\sqrt{a})$时，$f'(x)>0$，$x\in(\sqrt{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递增，在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递减. （3分）

综上，当 $a<0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递增，在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递减. （4分）

(2)证明：由 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $2a\ln x_1+\frac{b}{x_1^2}-x_1^2=2a\ln x_2+\frac{b}{x_2^2}-x_2^2$，

所以 $2a(\ln x_2-\ln x_1)=x_2^2-x_1^2+\frac{b}{x_1^2}-\frac{b}{x_2^2}=x_2^2-x_1^2+\frac{b(x_2^2-x_1^2)}{x_1^2x_2^2}$，

则$\frac{2a}{x_2^2-x_1^2}\ln\frac{x_2}{x_1}=1+\frac{b}{x_1^2x_2^2}$， （5分）

要证 $x_1^2+x_2^2+b\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)<\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}$，

即证$(x_1^2+x_2^2)\left(1+\frac{b}{x_1^2x_2^2}\right)<\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}$，

又 $a>0$，所以即证$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_2^2-x_1^2}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2<\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$，

即证$\frac{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2-1}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2<\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$， （6分）

令 $t=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2>1$，设 $g(t)=\frac{1+t}{t-1}\ln t(t>1)$，

则 $g'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$，

设 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$，

则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2>0$，

所以 $h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则 $h(t)>h(1)=0$，

所以 $g'(t)>0$，则 $g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，（7分）

由 $0<\sqrt{a}<x_1<x_2<\sqrt{b}$，得$\frac{b}{a}>\frac{x_2^2}{x_1^2}>1$，

所以 $g\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)<g\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1}\ln\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b-a}\ln\frac{b}{a}$，

所以需证$\frac{a+b}{b-a}\ln\frac{b}{a}<\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$，

即证 $\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$， （9分）

令 $m=\sqrt{\frac{b}{a}}$，则 $m>1$，只需证明 $2\ln m<m-\frac{1}{m}$，

即证 $2\ln m-m+\frac{1}{m}<0$， （10分）

设 $\varphi(m)=2\ln m-m+\frac{1}{m}(m>1)$，

则 $\varphi'(m)=\frac{2}{m}-1-\frac{1}{m^2}=\frac{-(m-1)^2}{m^2}<0$，

所以 $\varphi(m)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

则 $\varphi(m)<\varphi(1)=0$， （11分）

所以 $2\ln m-m+\frac{1}{m}<0$ 成立，

故 $x_1^2+x_2^2+b\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)<\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}$. （12分）

(二)选考题

22. **解**:(1)因为 $y=\frac{t^2-1}{t^2+1}(-1\leqslant y<1)$,

所以 $x^2+y^2=\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2=1$,

所以 C 的普通方程为 $x^2+y^2=1(y\neq1)$.　　(2 分)

直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-1$,

即 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta+1=0$,令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,

则化为直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$.　　(4 分)

(2)易知圆心$(0,0)$到直线 l 的距离为 $\frac{1}{2}$,

则 $|PQ|=2\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$,　　(5 分)

设 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)\left(0\leqslant\alpha\leqslant2\pi 且 \alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$,

所以点 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{|\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha+1|}{2}=\frac{\left|2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1\right|}{2}$,　　(6 分)

由 $\triangle MPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可知,$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\left|2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1\right|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,　　(7 分)

所以 $\left|2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1\right|=2$,则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$,　　(8 分)

所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$,

解得 $\alpha=0$ 或 $\alpha=\frac{4\pi}{3}$,　　(9 分)

故点 M 的坐标为$(1,0)$或$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.　　(10 分)

23. **解**:(1)当 $a=-2$ 时,$f(x)=1-|x-2|+|2x+2|$

$$=\begin{cases}x+5,x\geqslant2,\\3x+1,-1<x<2,\\-x-3,x\leqslant-1,\end{cases}$$　　(2 分)

不等式 $f(x)<\frac{1}{2}x+2$ 等价于 $\begin{cases}x\geqslant2,\\x+5<\frac{1}{2}x+2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<x<2,\\3x+1<\frac{1}{2}x+2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant-1,\\-x-3<\frac{1}{2}x+2,\end{cases}$　　(3 分)

解得 $-1<x<\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{10}{3}<x\leqslant-1$,

故不等式 $f(x)<\frac{1}{2}x+2$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{10}{3}<x<\frac{2}{5}\right.\right\}$.　　(4 分)

(2)$\exists x\in[-1,1]$,使得不等式 $f(x)\leqslant x^2+2x+3$ 成立,

所以 $\exists x\in[-1,1]$,使得 $|2x-a|\leqslant x^2+x+4$ 成立,　　(5 分)

因为 $x^2+x+4>0$,

所以 $-(x^2+x+4)\leqslant2x-a\leqslant x^2+x+4$,　　(6 分)

即 $\exists x\in[-1,1]$,使得 $-x^2-3x-4\leqslant-a\leqslant x^2-x+4$ 成立,

当 $x\in[-1,1]$时,$-x^2-3x-4=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\geqslant-8$,$x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\leqslant6$,　　(8 分)

所以 $-8\leqslant-a\leqslant6$,　　(9 分)

则 $-6\leqslant a\leqslant8$,

故实数 a 的取值范围为$[-6,8]$.　　(10 分)

江西省赣抚吉十一校联盟体2023届高三联合考试(四月)

理科数学双向细目表

题号	题型	分值	考查的主要内容及知识点	难度
1	选择题	5	集合的基本运算	易
2	选择题	5	复数的运算及共轭复数概念	易
3	选择题	5	导数的几何意义(数学文化)	易
4	选择题	5	简单线性规划	易
5	选择题	5	对数、指数函数的单调性	易
6	选择题	5	回归分析(情境问题)	中
7	选择题	5	立体几何中异面直线所成的角	中
8	选择题	5	二项式	中
9	选择题	5	抛物线	中
10	选择题	5	三角函数的图像与性质	中难
11	选择题	5	球的切接问题(情境问题)	中难
12	选择题	5	导数的运算法则与函数的基本性质	难
13	填空题	5	平面向量的共线定理	易
14	填空题	5	正态分布(社会热点——全国两会)(情境问题)	中
15	填空题	5	双曲线	中难
16	填空题	5	解三角形	难
17	解答题	12	数列的通项公式与数列求和	中
18	解答题	12	分布列与数学期望,概率的应用(情境问题)	中
19	解答题	12	空间位置关系、线面角的求法	中难
20	解答题	12	椭圆的综合问题	中难
21	解答题	12	导数及其应用	难
22	解答题	10	参数方程、普通方程、极坐标方程的互化,圆的参数方程的应用	中
23	解答题	10	含两个绝对值不等式的求法,不等式有解问题	中