

2023 年高考桂林、崇左市联合调研考试

2023.01

数 学 (理科)

注意事项:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 考生将自己的姓名、准考证号填写在答题卡指定位置上.
3. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚.
4. 请按题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效.

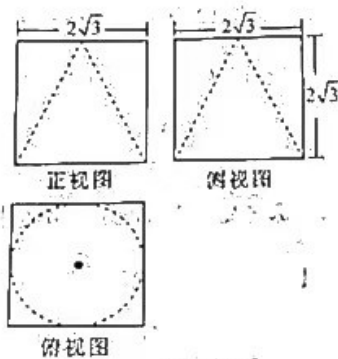
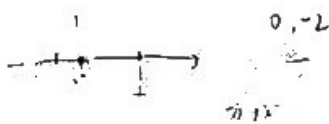
一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $A = \{x | -1 < x < 1\}$ , 集合  $B = \{x | x \geq -1\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $(-\infty, -1)$       B.  $(-1, 2)$       C.  $[-1, 2]$       D.  $\emptyset$

2. 在区间  $[-2, 2]$  内随机取一个数  $x$ , 使得不等式  $x^2 + 2x < 0$  成立的概率为

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{3}{4}$



第 3 题图

3. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为

- A.  $24\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\pi$   
B.  $24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\pi$   
C.  $24 - 2\sqrt{3}\pi$   
D.  $24 - 6\sqrt{3}\pi$

4. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F(2, 0)$ , 过  $F$  和  $P(0, 2b)$  两点的直线与双曲线的一条渐近线平行, 则该双曲线的方程为

- A.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$       B.  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$       C.  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$       D.  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

5.  $(x-2)^8$  的展开式中  $x^3$  的系数为

- A. 40      B. -40      C. 80      D. -80

6. 已知正项等比数列  $\{a_n\}$ ,  $a_3$  为  $2a_2$  与  $a_6$  的等比中项, 则  $\frac{a_3 + a_5}{a_1 + a_3} =$

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\sqrt{2}$       D. 2

高三 理科数学 第 1 页, 共 4 页

7. 已知函数  $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos(2x - \frac{\pi}{2}) - 1$ , 则下列说法正确的是

- A.  $f(x)$  的一条对称轴为  $x = \frac{\pi}{12}$
- B.  $f(x)$  的一个对称中心为  $(-\frac{\pi}{12}, 0)$
- C.  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$  上的值域为  $[-\sqrt{3}, 2]$
- D.  $f(x)$  的图象可由  $y = 2\sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位得到

8. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ , 过  $F$  的直线与抛物线交于点  $A, B$ , 与  $l$  交于点  $D$ , 若  $|\overline{AF}| = 3|\overline{FB}|$ ,  $|\overline{DB}| = 4$ , 则  $p =$

- A. 1
- B.  $\frac{3}{2}$
- C. 2
- D. 3

9. 牛顿冷却定律描述物体在常温环境下的温度变化: 如果物体的初始温度为  $T_0$ , 则经过一定时间

$t$  分钟后的温度  $T$  满足  $T - T_a = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{h}} (T_0 - T_a)$ ,  $h$  称为半衰期, 其中  $T_a$  是环境温度. 若  $T_a = 25^\circ\text{C}$ , 现有一杯  $80^\circ\text{C}$  的热水降至  $75^\circ\text{C}$  大约用时 1 分钟, 那么此杯热水水温从  $75^\circ\text{C}$  降至  $45^\circ\text{C}$  大约还需要 (参考数据:  $\lg 2 \approx 0.30$ ,  $\lg 11 \approx 1.04$ )

- A. 10 分钟
- B. 9 分钟
- C. 8 分钟
- D. 7 分钟

10. 若函数  $y = f(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$  是奇函数, 则  $f(2023) + f(-2022) =$

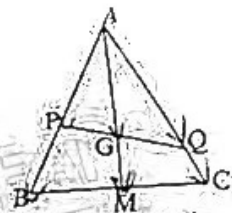
- A. -1
- B.  $-\frac{1}{2}$
- C.  $\frac{1}{2}$
- D. 1

11. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $M$  为线段  $BC$  的中点,  $G$  为线段  $AM$  上一点且  $\overline{AG} = 2\overline{GM}$ .

过点  $G$  的直线分别交直线  $AB, AC$  于  $P, Q$  两点,  $\overline{AB} = x\overline{AP} (x > 0)$ ,  $\overline{AC} =$

$y\overline{AQ} (y > 0)$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+1}$  的最小值为

- A.  $\frac{3}{4}$
- B. 1
- C.  $\frac{4}{3}$
- D. 4



12. 已知  $a, b, c \in (1, +\infty)$ , 且  $2e^a \ln 3 = 9a, 3e^b \ln 2 = 8b, 2e^{c-2} = c$ , 则

- A.  $a > b > c$
- B.  $a > c > b$
- C.  $b > c > a$
- D.  $c > a > b$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $i$  为虚数单位, 若  $\frac{i}{1+i} = a+bi, (a, b \in R)$ , 则  $a+b =$  1.

14. 若钝角  $\triangle ABC$  中,  $AB = \sqrt{3}, AC = 1, B = 30^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为         .

15. 近年来,“考研热”持续升温,2022年考研报考人数官方公布数据为457万,相比于2021年增长了80万之多,增长率达到21%以上.考研人数急剧攀升原因较多,其中,本科毕业生人数增多、在职人士考研比例增大,是两大主要因素.据统计,某市各大高校近几年的考研报考总人数如下:

|               |      |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|------|
| 年份            | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
| 年份序号 $x$      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
| 报考人数 $y$ (万人) | 1.1  | 1.6  | 2    | 2.5  | $m$  |

根据表中数据,可求得  $y$  关于  $x$  的线性回归方程为  $\hat{y}=0.43x+0.71$ , 则  $m$  的值为 2.8.

16. 已知棱长为8的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,平面  $ABCD$  内一点  $E$  满足  $\overline{BE}=\frac{1}{4}\overline{CB}$ , 点  $P$  为正方体表面一动点,且满足  $|PE|=2\sqrt{2}$ , 则动点  $P$  运动的轨迹周长为         .

三、解答题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一) 必考题:共60分.

17. (本小题12分) 4月23日是“世界读书日”.读书可以陶冶情操,提高人的思想境界,丰富人的精神世界.为了丰富校园生活,展示学生风采,某中学在全校学生中开展了“阅读半马比赛”活动.活动要求每位学生在规定时间内阅读给定书目,并完成在线阅读检测.通过随机抽样,得到100名学生的检测得分(满分:100分)如下表:

|    |         |         |         |         |         |          |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
|    | [40,50) | [50,60) | [60,70) | [70,80) | [80,90) | [90,100] |
| 男生 | 2       | 3       | 5       | 15      | 18      | 12       |
| 女生 | 0       | 5       | 10      | 10      | 7       | 13       |

- (1) 若检测得分不低于70分的学生称为“阅读爱好者”,

①完成下列  $2 \times 2$  列联表

|    |       |        |     |
|----|-------|--------|-----|
|    | 阅读爱好者 | 非阅读爱好者 | 总计  |
| 男生 | 20    | 15     | 35  |
| 女生 | 30    | 15     | 45  |
| 总计 | 50    | 30     | 100 |

②请根据所学知识判断能否在犯错误的概率不超过0.05的前提下,认为“阅读爱好者”与性别有关;

- (2) 若检测得分不低于80分的人称为“阅读达人”.现从这100名学生中的男生“阅读达人”中,按分层抽样的方式抽取5人,再从这5人中随机抽取3人,记这三人中得分在[90,100]内的人数为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望.

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n=a+b+c+d$ .

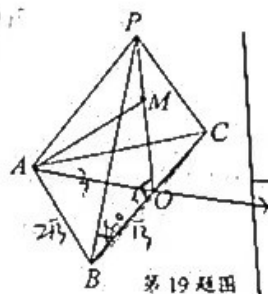
|                   |       |       |       |       |        |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.05  | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
| $k_0$             | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

18. (本小题12分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1=1$ ,  $S_n = a_{n+1} - 2^n$ .

(1) 证明: 数列  $\left\{\frac{S_n}{2^n}\right\}$  为等差数列;

(2)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(n-6)a_n \geq \lambda 2^n$ , 求  $\lambda$  的最大值.

19. (本小题 12 分) 在三棱锥  $P-ABC$  中, 底面  $ABC$  是边长为  $2\sqrt{3}$  的等边三角形, 点  $P$  在底面  $ABC$  上的射影为边  $BC$  的中点  $O$ , 且  $PB$  与底面  $ABC$  所成角为  $\frac{\pi}{3}$ , 点  $M$  为线段  $PO$  上一动点.



(1) 求证:  $BC \perp AM$ ;

(2) 是否存在点  $M$ , 使得二面角  $P-AB-M$  的余弦值为  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ , 若存在, 求出点  $M$  的位置, 若不存在, 请说明理由.

20. (本小题 12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过  $A(-2, 0), B(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  两点.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2)  $F$  为椭圆  $C$  的右焦点, 直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $P, Q$  (均不与点  $A$  重合) 两点, 记直线  $AP, AQ, l$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k$ , 若  $k \cdot k_1 + k \cdot k_2 + 3 = 0$ , 求  $\triangle FPQ$  的周长.

21. (本小题 12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{x}{e^{ax}}, g(x) = \ln x - ax$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  的最小值;

(2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) + g(x) = 0$  有两个不同的实根, 证明:  $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答; 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】 (本小题 10 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以坐标原点为极点,  $x$

轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \sqrt{\frac{6}{\cos 2\theta + 2}}$ .

(1) 求曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 若直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$ .

23. 【选修 4-5: 不等式选讲】 (本小题 10 分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + |x - 2a + 1|, a \in \mathbb{R}$ .

(1) 当  $a=3$  时, 求  $f(x)$  的最小值;

(2) 若对  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in (0, 6)$ , 不等式  $f(x) > m\sqrt{12 - 2m}$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线