炎德·英才大联考湖南师大附中2019届高考模拟卷(二)

数学(文科)参考答案

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	D	C	D	B	D	C	D	C	B	B	D	A

2. C 【解析】由 $a^2b>ab^2$,得 $ab(a-b)>0$,若 $a-b>0$,即 $a>b$,则 $ab>0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立,若 $a-b<0$,即 $a<b$,则 $ab<0$,则 $a<0$,$b>0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立,若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,则 $\frac{b-a}{ab}<0$,即 $ab(a-b)>0$,即 $a^2b>ab^2$ 成立.即"$a^2b>ab^2$"是"$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"的充要条件,故选C.

3. D 【解析】$\{a_n\}$是等比数列,$\{b_n\}$是等差数列,且 $a_2\cdot a_6\cdot a_{10}=3\sqrt{3}$,$b_1+b_6+b_{11}=7\pi$,$\therefore a_6^3=(\sqrt{3})^3$,$3b_6=7\pi$,$\therefore a_6=\sqrt{3}$,$b_6=\frac{7\pi}{3}$,

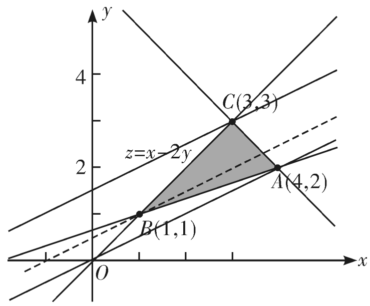
$\therefore \tan\frac{b_2+b_{10}}{1-a_3\cdot a_9}=\tan\frac{2b_6}{1-a_6^2}=\tan\frac{2\times\frac{7\pi}{3}}{1-(\sqrt{3})^2}=\tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\tan\left(-2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.故选D.

5. D 【解析】由图知本程序的功能是执行 $S=\cos 0+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cdots+\cos\frac{2\,019\pi}{3}$,此处注意程序结束时 $n=2\,019$,由余弦函数和诱导公式易得:$\cos 0+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}=0$,周期为6,$2\,020=336\times 6+4$,$S=\cos 0+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cdots+\cos\frac{2\,019\pi}{3}=336\times 0+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=0$,故选D.

8. C 【解析】$\because x=\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$,$y=\ln 2>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$,$x=\log_3 2=\frac{\ln 2}{\ln 3}<\ln 2=y$,$z=5^{-\frac{1}{2}}<4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$,$\therefore z<x<y$.故选C.

9. B 【解析】对于A,当$|CD|=2|AB|$时,若A、B、C、D四点共面且$AC\parallel BD$时,则M、N两点能重合.故A不对;对于B,若M、N两点可能重合,则$AC\parallel BD$,故$AC\parallel l$,此时直线AC与直线l不可能相交,故B对;对于C,当AB与CD相交,直线AC平行于l时,直线BD可以与l平行,故C不对;对于D,当AB、CD是异面直线时,MN不可能与l平行,从而D不对,故选B.

10. B 【解析】作出不等式组$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\x-3y+2\leqslant 0,\\x+y-6\leqslant 0\end{cases}$表示的平面区域,得到如图的$\triangle ABC$及其内部,其中$A(4,2)$,$B(1,1)$,$C(3,3)$.设$z=F(x,y)=x-2y$,将直线$l$:$z=x-2y$进行平移,当$l$经过点$A$时,目标函数$z$达到最大值,可得$z_{最大值}=F(4,2)=0$;当$l$经过点$C$时,目标函数$z$达到最小值,可得$z_{最小值}=F(3,3)=-3$,因此,$z=x-2y$的取值范围为$[-3,0]$,$\because$存在实数$m$,使不等式$x-2y+m\leqslant 0$成立,即存在实数$m$,使$x-2y\leqslant -m$成立,$\therefore -m$大于或等于$z=x-2y$的最小值,即$-3\leqslant -m$,解之得$m\leqslant 3$,故选B.



11. D 【解析】双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线为:$y=\frac{b}{a}x$,圆$C$:$x^2+(y-b)^2=4$的圆心坐标为$(0,b)$,半径为2,由$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$所以三角形$ABC$是边长为2的等边三角形,故$AB=2$,$OA=1$,圆心到直线$y=\frac{b}{a}x$的距离为$\sqrt{3}$,在$\triangle OBC$,$\triangle OAC$中,由余弦定理得$\cos\angle BOC=\frac{b^2+1-4}{2b}=\frac{3^2+b^2-4}{6b}$,解得$b^2=7$圆心到直线$y=\frac{b}{a}x$的距离为$\sqrt{3}$,有$\frac{ab}{c}=\sqrt{3}$,$\therefore\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$,故选D.

12. A 【解析】由题意可知,不妨设$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,则$f(0)=1$,$\because f(a_{n+1})f\left(\frac{1}{1+a_n}\right)=1=f(0)$,$\therefore$则$a_{n+1}+\frac{1}{1+a_n}=0$,即$a_{n+1}=-\frac{1}{1+a_n}$且$a_1=1$,当$n=1$时,$a_2=-\frac{1}{2}$;当$n=2$时,$a_3=-2$;当$n=3$时,$a_4=1$,所以数列$\{a_n\}$是以3为周期的周期数列;$a_{2\,016}=a_3=-2$,$a_{2\,017}=a_1=1$,$a_{2\,018}=a_2=-\frac{1}{2}$,$a_{2\,019}=a_3=-2$,$a_{2\,020}=a_1=1$,又因为$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$是单调递减函数,所以$f(a_{2\,016})>f(a_{2\,018})$.故答案选A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分.

13. -5

14. 75° 【解析】由$\sqrt{3}(a\cos C-c\cos A)=b$及正弦定理得$\sqrt{3}(\sin A\cos C-\sin C\cos A)=\sin B$，即$\sqrt{3}\sin(A-C)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin(A-C)=\frac{1}{2}$，$\therefore A-C=30^\circ$，又$\because A+C=180^\circ-B=120^\circ$，$\therefore 2A=150^\circ$，得$A=75^\circ$.

15. 1 或 -5 【解析】圆的标准方程为$(x-a)^2+y^2=1$，圆心$M(a,0)$到直线AB：$x-y+2=0$的距离为$d=\frac{|a+2|}{\sqrt{2}}$，圆上的点到直线AB的最短距离为$d-1=\frac{|a+2|}{\sqrt{2}}-1$，$(S_{\triangle ABC})_{\min}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{|a+2|-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$，解得$a=1$或$a=-5$.

16. $[1,e^2-2]$ 【解析】因为函数$g(x)=a-x^2\left(\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e，e为自然对数的底数\right)$与$h(x)=2\ln x$的图象上存在关于$x$轴对称的点，等价于$a-x^2=-2\ln x\Leftrightarrow -a=2\ln x-x^2$，在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有解，设$f(x)=2\ln x-x^2$，求导得$f(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{2(1+x)(1-x)}{x}$，$\because \frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e$，$\therefore f'(x)=0$在$x=1$有唯一的极值点，$f(x)$在$\left[\frac{1}{e},1\right]$上单调递增，在$[1,e]$上单调递减，$f(x)_{\max}=f(1)=-1$，$\because f\left(\frac{1}{e}\right)=-2-\frac{1}{e^2}$，$f(e)=2-e^2$，$f(e)<f\left(\frac{1}{e}\right)$，$f(x)$的值域为$[2-e^2,-1]$，故方程$-a=2\ln x-x^2$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有解等价于$2-e^2\leqslant -a\leqslant -1$，从而$a$的取值范围是$[1,e^2-2]$，故答案为$[1,e^2-2]$.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)$\begin{cases}S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}+n,\\ S_{n-1}=\frac{1}{2}a_n+(n-1),\end{cases}(n\geqslant 2)$时，$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n+1$，

即$a_{n+1}=3a_n-2(n\geqslant 2)$，即$(a_{n+1}-1)=3(a_n-1)$，当$a_1=2$时，$a_2=2$，$\frac{a_2-1}{a_1-1}=1\neq 3$，

故$\{a_n-1\}$是以$a_2-1=1$为首项，3为公比的等比数列，$\therefore a_n-1=1\cdot 3^{n-2}$，即$a_n=3^{n-2}+1$，$n\geqslant 2$.

$\therefore a_n=\begin{cases}2,n=1,\\ 3^{n-2}+1,n\geqslant 2.\end{cases}$ ………………………………………………………… 6 分

(2)$b_n=(4n-2)a_{n+1}=(4n-2)\cdot(3^{n-1}+1)=(4n-2)3^{n-1}+(4n-2)$

记$s_n'=2\cdot 3^0+6\cdot 3^1+10\cdot 3^2+\cdots+(4n-2)3^{n-1}$，　①

$3s_n'=2\cdot 3^1+6\cdot 3^2+\cdots+(4n-6)3^{n-1}+(4n-2)3^n$，　②

由①－②得，$-2s_n'=2\cdot 3^0+4\cdot(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-(4n-2)\cdot 3^n$，

$\therefore s_n'=2+(2n-2)3^n$，

$\therefore T_n=2+(2n-2)\cdot 3^n+\frac{(4n-2+2)n}{2}=2+(2n-2)\cdot 3^n+2n^2$. ………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)设$AC\cap BD=O$，连接PO，$\because BC=CD$，$AC\perp BD$，$\therefore O$为BD中点.

又$\because PB=PD$，$\therefore PO\perp BD$，$\because$平面$PAC\perp$平面PBD，平面$PAC\cap$平面$PBD=PO$，

$\therefore BD\perp$平面PAC，$PA\subset$平面PAC，$\therefore PA\perp BD$，

在$\triangle PCA$中，由余弦定理得$PA^2=PC^2+AC^2-2PC\cdot AC\cos 30^\circ$，

$PA^2=16+12-2\times 4\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4$，而$PA^2+AC^2=PC^2$，

$\left.\begin{array}{l}\therefore PA\perp AC,\\ PA\perp BD,\\ BD\cap AC=O,\end{array}\right\}\Rightarrow PA\perp$平面$ABCD$. ………………………………………………………… 6 分

(2)因为$\frac{PM}{MC}=2$，可知点M到平面PBD的距离是点C到平面PBD的距离的$\frac{2}{3}$，

$\therefore V_{M-PBD}=\frac{2}{3}V_{C-PBD}=\frac{2}{3}V_{P-BCD}$，在四边形$ABCD$中，$\angle BAD=120^\circ$，$AB\perp BC$，

则$\angle BAC=60^\circ$，$AB=AC\sin 30^\circ=\sqrt{3}$，$BC=3$，则$S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore V_{M-PBD}=\frac{2}{3}V_{P-BCD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{4}\times 2=\sqrt{3}.$ …………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)依题意得 $y=\begin{cases}200\times 10+50x, x\leqslant 10,\\ 250\times 10+500(x-10), x>10,\end{cases}(x\in\mathbf{N})$,

即 $y=\begin{cases}50x+2\ 000, x\leqslant 10,\\ 500x-2\ 500, x>10\end{cases}(x\in\mathbf{N})$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)因为"维修次数不大于 10"的频率为 $\frac{10+20+30}{100}=0.6<0.8$,

"维修次数不大于 11"的频率为 $\frac{10+20+30+30}{100}=0.9>0.8$,

所以若要求"维修次数不大于 n"的频率不小于 0.8,则 n 的最小值为 11. …………………………………… 8 分

(3)若每台都购买 10 次维修服务,则有下表:

维修次数 x	8	9	10	11	12
频数	10	20	30	30	10
费用 y	2 400	2 450	2 500	3 000	3 500

此时这 100 台机器在维修上所需费用的平均数为

$y_1=\frac{2\ 400\times 10+2\ 450\times 20+2\ 500\times 30+3\ 000\times 30+3\ 500\times 10}{100}=2\ 730$(元).

若每台都购买 11 次维修服务,则有下表:

维修次数 x	8	9	10	11	12
频数	10	20	30	30	10
费用 y	2 600	2 650	2 700	2 750	3 250

此时这 100 台机器在维修上所需费用的平均数为

$y_2=\frac{2\ 600\times 10+2\ 650\times 20+2\ 700\times 30+2\ 750\times 30+3\ 250\times 10}{100}=2\ 750$(元).

因为 $y_1<y_2$,所以购买 1 台机器的同时应购买 10 次维修服务. …………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)依题意,$a=\sqrt{2}b$,$c=1$,

解得 $a^2=2$,$b^2=1$,∴椭圆 Γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………… 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$,

当直线 l 垂直于 x 轴时,$x_1=x_2=-1$,$y_1=-y_2$ 且 $y_1^2=\frac{1}{2}$,此时 $\overrightarrow{PA}=(-3,y_1)$,$\overrightarrow{PB}=(-3,y_2)=(-3,-y_1)$,

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-3)^2-y_1^2=\frac{17}{2}$, …………………………………………………………… 7 分

当直线 l 不垂直于 x 轴时,设直线 l:$y=k(x+1)$,

由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 整理得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$,

所以 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$,

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+k^2(x_1+1)(x_2+1)$

$=(1+k^2)x_1x_2+(k^2-2)(x_1+x_2)+4+k^2=(1+k^2)\frac{2k^2-2}{1+2k^2}-(k^2-2)\cdot\frac{4k^2}{1+2k^2}+4+k^2$

$=\frac{17k^2+2}{2k^2+1}=\frac{17}{2}-\frac{13}{2(2k^2+1)}<\frac{17}{2}$.

要使不等式 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant\lambda(\lambda\in\mathbf{R})$ 恒成立,只需 $\lambda\geqslant(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})_{\max}=\frac{17}{2}$,

即 λ 的最小值为 $\frac{17}{2}$. …………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，恒有 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{1}{a}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

综上①②可知：当 $a\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$. …………………………………………………… 4 分

(2)因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $x>0$ 且 $\frac{2}{a}-x>0$，而 $a>0$，故 $0<x<\frac{2}{a}$.

设 $F(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{a}-x\right)=\ln x-ax-\ln\left(\frac{2}{a}-x\right)+a\left(\frac{2}{a}-x\right)=\ln x-\ln\left(\frac{2}{a}-x\right)-2ax+2$，

$F'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{a}-x}-2a=\frac{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2}{x\left(\frac{2}{a}-x\right)}\geqslant 0$，且当且仅当 $x=\frac{1}{a}$ 时取等号，……………………………………………… 6 分

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 上单调递增，又因为 $x=\frac{1}{a}$ 时，$F(x)=F\left(\frac{1}{a}\right)=0$

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$F(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1}{a},\frac{2}{a}\right)$ 时，$F(x)>0$，

故 $f(x)-f\left(\frac{2}{a}-x\right)>0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{a},\frac{2}{a}\right)$. ……………………………………………………………………… 8 分

(3)由(1)知 $a\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$，不合题意，

故 $a>0$，而 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

若存在两个不相等的正数 x_1、x_2 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，

则 x_1、x_2 必有一个在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上，另一个在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上，不妨设 $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，则 $\frac{2}{a}-x_1\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$. ………… 10 分

又由(2)知 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$F(x)<0$，即 $f(x)-f\left(\frac{2}{a}-x\right)<0$，所以 $f(x_1)<f\left(\frac{2}{a}-x_1\right)$.

因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)<f\left(\frac{2}{a}-x_1\right)$，

又因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $x_2>\frac{2}{a}-x_1$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$. …………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由 $x=\sqrt{3}(1+t)=\sqrt{3}y$ 得 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. 极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$.

由 $(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=16$，$x^2+y^2-4\sqrt{3}+2y-3=0$.

由 $x^2+y^2=\rho$ 知 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$. 则 $\rho^2-4\sqrt{3}\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-3=0$. …………………………………… 5 分

(2)将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入，$\rho^2-6\rho+\rho-3=0$. 即 $\rho^2-5\rho-3=0$.

由极坐标几何意义，设 $A\left(\rho_1,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$，$(\rho_2<0)$.

即 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1\rho_2}=\frac{-\sqrt{25+12}}{-3}=\frac{\sqrt{37}}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(1) $g(x)=|x-1|-2|x+1|$，即 $g(x)=\begin{cases}-x-3, & x\geqslant 1,\\ -3x-1, & -1<x<1,\\ x+3, & x\leqslant -1,\end{cases}$

知 $g(x)_{\max}=g(-1)=2$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由 $\frac{1}{m}+\frac{1}{2n}=2$，知 $f(m+2)+f(2n)=|m+1|+|2n-1|\geqslant|m+1+2n-1|$

$=|m+2n|=\left|\frac{1}{2}(m+2n)\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2n}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|1+1+\frac{2n}{m}+\frac{m}{2n}\right|\geqslant\frac{1}{2}|1+1+2|=2$.

当且仅当 $\frac{2n}{m}=\frac{m}{2n}$，即 $m^2=4n^2$ 时取等号，故得证. …………………………………………………………… 10 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注