数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	D	B	B	A	C

【解析】

1．由 $i^2=-1$，所以 $z=1+i$，故而 $\overline{z}=1-i$，所以 $\overline{z}$ 在复平面内所对应的点位于第四象限，故选 D．

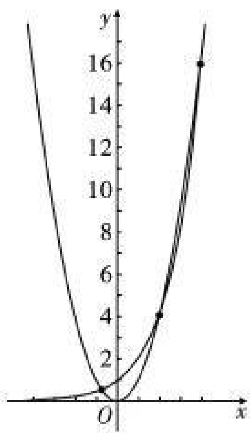


图1

2．如图 1，集合 A 为函数 $y=2^x$ 图象的点集，集合 B 为函数 $y=x^2$ 图象的点集，两函数的图象有三个交点，所以 $A\cap B$ 的元素个数为3个，故选 C．

3．由 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为等差数列，所以 $\{a_n+b_n\}$ 为等差数列，故而 $S_{10}=5(a_1+b_1+a_{10}+b_{10})=65$，故选 B．

4．由三角函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的性质知，$f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的两个根之间的距离的最小值占函数周期的 $\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{1}{3}T=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\omega=\pm4$，故选 D．

5．如图 2，设经过点 T 的直线 AB 的方程为 $x=my+2p$，与抛物线 C：$y^2=2px$ 联立方程得：$y^2-2pmy-4p^2=0$，令 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $y_1+y_2=2pm$，$y_1\cdot y_2=-4p^2$，则 $x_1\cdot x_2=(my_1+2p)(my_2+2p)=m^2y_1y_2+2pm(y_1+y_2)+4p^2=4p^2$，$x_1\cdot x_2+y_1y_2=4p^2-4p^2=0$，所以 $\angle AOB$ 为直角，故选 B．

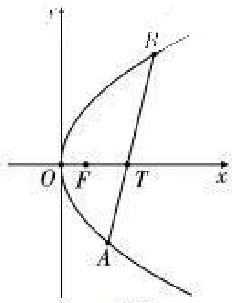


图 2

6．令 $\tan A=k(k>0)$，由 $\tan B=2k$，$\tan C=3k$，又 $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$，所以 $6k=6k^3$，则 $k=1$，故选 B．

7．设 A_i 表示第 i 次投篮的人为甲，$i=1,\ 2$；B_i 表示第 i 次投篮的人为乙，$i=1,\ 2$；则第 2 次投篮的人是乙的情况下第一次是甲投篮的概率：$P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(A_1B_2)+P(B_1B_2)}$ $=\dfrac{0.5\times0.4}{0.5\times0.4+0.5\times0.8}=\dfrac{1}{3}$，故选 A．

8．由 $a=\log_2 3\in(1,2)$，$2a=2\log_2 3=\log_2 9\in(3,4)$，$3a=3\log_2 3=\log_2 27\in(4,5)$，所以 $a-1=\log_2 3-1=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)\in(0,1)$，$2a-3=\log_2\left(\frac{9}{8}\right)\in(0,1)$，$3a-4=\log_2\left(\frac{27}{16}\right)\in(0,1)$. 又对任意的实数 x，均有 $f(x)+f(x+1)=1$，所以 $f(x+1)+f(x+2)=1$，则由 $f(x)=f(x+2)$，所以 $f(a)=1-f(a-1)=1-f\left[\log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right]=1-\left[\frac{3}{2}-\log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right]=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}$，$f(2a)=1-f(2a-3)=1-f\left[\log_2\left(\frac{9}{8}\right)\right]=1-\left[\frac{9}{8}-\log_2\left(\frac{9}{8}\right)\right]=\log_2\left(\frac{9}{8}\right)-\frac{1}{8}$，$f(3a)=f(3a-4)=f\left[\log_2\left(\frac{27}{16}\right)\right]=\frac{27}{16}-\log_2\left(\frac{27}{16}\right)$，$f(a)+f(2a)+f(3a)=\frac{17}{16}+\left(\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{9}{8}-\log_2\frac{27}{16}\right)=\frac{17}{16}$，故选 C.

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分）

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABD	ACD	ACD

【解析】

9．如图3，当点 F 为棱 CC' 的中点时，截面 $AEFD'$ 为等腰梯形；当点 F 在点 C' 处时，截面 $AEFG$ 为菱形；当 $\frac{1}{2}CC'<CF<CC'$ 时，截面 $AEFNM$ 为五边形；当 $0<CF<\frac{1}{2}CC'$ 时，截面 $AEFP$ 为四边形；综上所述，故选 AC.

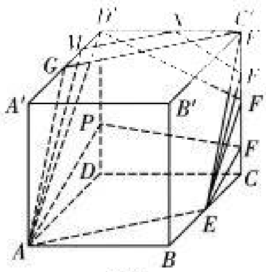


图3

10．如图4，$PA+PF$ 的最小值，即是 AF 的长，当点 P 在 P' 位置时取到，所以 $PA+PF$ 的最小值为 $\sqrt{13}$，故 A 正确；设椭圆的右焦点为 F'，所以 $PA+PF=4+PA-PF'$，当点 P 在 P'' 位置时取到，所以 $PA+PF$ 的最大值为7，故 B 正确；$PF-PA$ 的最小值当 P 在 P''' 位置时取到，$PF-PA$ 的最小值为 $-\sqrt{13}$，故 C 错误；由 $PF-PA=4-PF'-PA=4-(PA+PF')$，当点 P 在 P'''' 位置时取到最大值，所以 $PF-PA$ 的最大值为1，故 D 正确，故选 ABD.

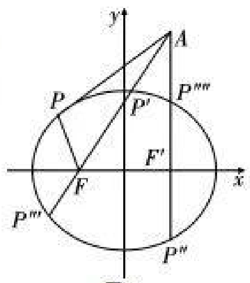


图4

11．由 $a>0,\ b>0$ 且 $a+b=1$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 9$，当且仅当 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$ 时取等号，故 A 正确；由 $\left(\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b+2}\right)(a+1+b+2)=5+\frac{4(b+2)}{a+1}+\frac{a+1}{b+2}\geqslant 9$，即 $\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b+2}\geqslant\frac{9}{4}$，要使得不等式取等号需满足 $a+1=\frac{8}{3}$，$b+2=\frac{4}{3}$，不合题意，故 B 不正确；$\frac{1}{9b^2}-6a=\frac{1}{9b^2}+6b-6=\frac{1}{9b^2}+3b+3b-6\geqslant 3\sqrt[3]{1}-6=-3$，当且仅当 $b=\frac{1}{3}$ 时取等号，故 C 正确；$\frac{6}{a}+\frac{8}{b^2}+54a+54b-54=\frac{6}{a}+54a+\frac{8}{b^2}+27b+27b-54\geqslant 2\sqrt{6\times 54}+3\sqrt[3]{8\times 27\times 27}-54=36$，当且仅当 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$ 时取等号，故 D 正确，故选 ACD.

12．对于 A，令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)g(0)-g(0)f(0)=0$，故 A 正确；令 $x=1$，$y=0$，则 $f(1)=f(1)g(0)-g(1)f(0)=f(1)g(0)$．又 $f(1)\neq 0$，则 $g(0)=1$，故 B 错误；令 $x=0$，则 $f(-y)=f(0)g(y)-g(0)f(y)=-f(y)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，故而 C 正确；令 $x=1$，$y=-1$，则 $f(2)=f(1)g(-1)-f(-1)g(1)=f(1)[g(1)+g(-1)]$，由 $f(1)\neq 0$，所以 $g(1)+g(-1)=-1$，令 $y=1$，则 $f(x-1)=f(x)g(1)-g(x)f(1)$，令 $y=-1$，则 $f(x+1)=f(x)g(-1)-g(x)f(-1)$，两式相加得：$f(x+1)+f(x-1)=f(x)[g(-1)+g(1)]=-f(x)$，即：$f(x-1)+f(x)+f(x+1)=0$，所以 $f(x)+f(x+1)+f(x+2)=0$，故有 $f(x-1)=f(x+2)$，所以3是 $f(x)$ 的一个周期，所以 D 正确，故选 ACD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	169；37.5	$\sqrt{2}$

【解析】

13．由 $|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，所以 $(\vec{a}+2\vec{b})^2=4$，即 $(\vec{a})^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4(\vec{b})^2=4$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，所以 $\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，所以 $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

14．由正八面体的顶点是正方体的六个面的中心，结合几何体的对称性，边长为 2 的正方体可以看成是八个边长为 1 的正方体组成，正方体的内切球的半径可以看成边长为 1 体对角线的三分之一，即 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以正八面体的内切球的表面积为 $\frac{4\pi}{3}$.

15．由题意知：$\overline{\omega}=\dfrac{5\times172+3\times164}{8}=169$；设男生的身高为$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$，身高的平均数为$\overline{x}$，方差为$s_x^2$；设女生的身高为$y_1$，$y_2$，$y_3$，身高的平均数为$\overline{y}$，方差为$s_y^2$；由

$$s_x^2=\frac{1}{5}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+(x_4-\overline{x})^2+(x_5-\overline{x})^2]$$，所以：$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$

$=5(s_x^2+\overline{x}^2)$，同理$y_1^2+y_2^2+y_3^2=3(s_y^2+\overline{y}^2)$，则：

$$s^2=\frac{1}{8}[(x_1-\overline{\omega})^2+(x_2-\overline{\omega})^2+\cdots+(x_5-\overline{\omega})^2+(y_1-\overline{\omega})^2+(y_2-\overline{\omega})^2+(y_3-\overline{\omega})^2]$$

$$=\frac{1}{8}[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+8\overline{\omega}^2-10\overline{x}\cdot\overline{\omega}-6\overline{y}\cdot\overline{\omega}]$$

$$=\frac{1}{8}[5s_x^2+5(\overline{x}-\overline{\omega})^2+3s_y^2+3(\overline{y}-\overline{\omega})^2]=37.5.$$

16．由题意知：如图5，$f(x)=xe^x+1$在$A(0,1)$处的切线方程为$y=x+1$，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$B(1,0)$处的切线方程为$y=x-1$，且$k_{AB}=-1$，即AB与两切线垂直，故而PQ的距离的最小值即为AB的长，所以$|PQ|_{\min}=\sqrt{2}$.

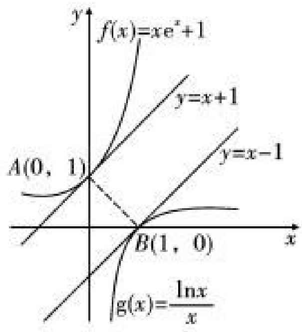


图5

四、解答题（共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分10分）

解：（1）由$b\cos A+a\cos B-2c\cos A=0$及正弦定理知：

$\sin B\cos A+\sin A\cos B-2\sin C\cos A=0$，

所以$\sin(A+B)-2\sin C\cos A=0$.

由$A+B+C=\pi$，即$\sin C-2\sin C\cos A=0$，由$C\in(0,\pi)$，

所以$\sin C\neq0$，则$\cos A=\dfrac{1}{2}$，

由$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………（5分）

（2）如图6，由题意及角平分线定理知：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}=2$，

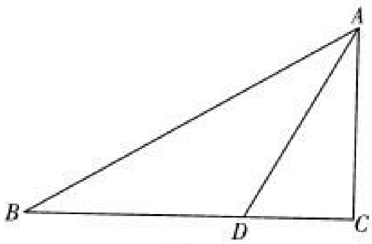


图6

令$AC=m$，则$AB=2m$，

又$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，平方得：$3=\dfrac{4}{9}m^2+\dfrac{4}{9}m^2+2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times2m\times m\times\dfrac{1}{2}$，

所以$m=\dfrac{3}{2}$，即$AC=\dfrac{3}{2}$，$AB=3$，

故而$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{9}{8}\sqrt{3}$.　　……………………………（10分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：由 $a_n=2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，

所以 $a_n+1=2a_{n-1}+2=2(a_{n-1}+1)$，

所以 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n+1=2^n$，即 $a_n=2^n-1$． ……………………………………………（6 分）

（2）解：由（1）知：$a_{n+1}+1=2^{n+1}$，所以 $b_n=\dfrac{(-1)^n(3n+2)}{n(n+1)\cdot 2^{n+1}}$．

又 $b_n=(-1)^n\left[\dfrac{1}{n\cdot 2^n}+\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]$，

所以 $S_n=-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}\right)-\left(\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\dfrac{1}{4\cdot 2^4}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\dfrac{1}{n\cdot 2^n}+\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right)$

$=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}-\dfrac{1}{2}$． ……………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）令事件 A_i：甲在第 i 局获胜，$i=1，2，3$．

甲连胜两局的概率为：$P=P(A_1A_2)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}+p\right)=\dfrac{5}{16}$，

所以 $p=\dfrac{1}{8}$，则甲 2:1 获胜的概率为：

$P=P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$． ……………………………………………（6 分）

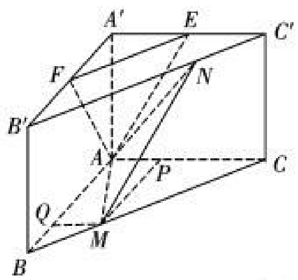
（2）由题意知，在甲且在甲第一局获胜的情况下，

甲输掉比赛事件为：甲接下来的比赛中连输两场，即 $P=P(\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$，

故而甲、乙应按照 13:3 的比例来分配比赛奖金，

即甲班级应获得 13 个排球，乙获得 3 个排球比较合理． ……………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）



（1）证明：如图 7，在平面 ABC 中，过点 M 分别作 AC，AB 的垂线，垂足分别为 P，Q，

由平面 $ABC\perp$ 平面 $ACC'A'$，

且 $MP\perp AC$，由面面垂直的性质定理知：$MP\perp$ 平面 $ACC'A'$，所以 $MP\perp AA'$.

图 7

同理：$MQ\perp AA'$，

又 $MP\cap MQ=M$，所以 $AA'\perp$ 平面 ABC. ……………………………………（6 分）

（2）解：由（1）知：$AA'\perp$ 平面 ABC，

又 $AB=AC=3$，$BC=3\sqrt{2}$，所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，

所以 $AB\perp AC$，所以 AB，AC，AA' 两两垂直；

建立如图 8 所示的平面直角坐标系，

则 $A(0,\ 0,\ 0)$，$E\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ 2\right)$，$F\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 2\right)$，$M(2,\ 1,\ 0)$，

$N(1,\ 2,\ 2)$，

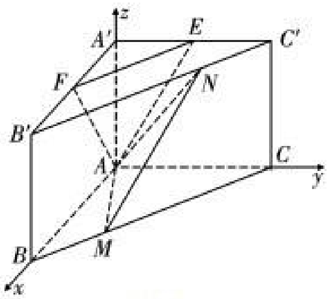


图 8

$\overline{AE}=\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ 2\right)$，$\overline{AF}=\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 2\right)$，$\overline{AM}=(2,\ 1,\ 0)$，$\overline{AN}=(1,\ 2,\ 2)$.

设 $\overline{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 为平面 AEF 的一个法向量，则 $\begin{cases}\overline{AE}\cdot\overline{n_1}=0,\\ \overline{AF}\cdot\overline{n_1}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\dfrac{3}{2}y_1+2z_1=0,\\ \dfrac{3}{2}x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=3$，则 $x_1=-4$，$y_1=-4$，则 $\overline{n_1}=(-4,\ -4,\ 3)$.

设 $\overline{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 为平面 AMN 的一个法向量，则 $\begin{cases}\overline{AM}\cdot\overline{n_2}=0,\\ \overline{AN}\cdot\overline{n_2}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2x_2+y_2=0,\\ x_2+2y_2+2z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=4$，则 $x_2=-2$，$z_2=-3$，则 $\overline{n_2}=(-2,\ 4,\ -3)$.

设 θ 是平面 AEF 与平面 AMN 所成锐二面角，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}|}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}=\dfrac{17\sqrt{1189}}{1189}$，

所以平面 AEF 与平面 AMN 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{17\sqrt{1189}}{1189}$. ………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln x$，$x\in(0,\ +\infty)$，

所以 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

故而 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增；

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$. ……………………………………………（4 分）

（2）$g(x) \geqslant f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立等价于：$\dfrac{e^x}{x}+2e^3 \geqslant a(x-\ln x)$ 恒成立，

即 $e^{x-\ln x}-a(x-\ln x) \geqslant -2e^3$，在 $(0, +\infty)$ 恒成立，

令 $t=x-\ln x$，由（1）知：上面不等式等价于：

$e^t-at \geqslant -2e^3$，在 $t\in[1, +\infty)$ 上恒成立，

所以 $a \leqslant \dfrac{e^t+2e^3}{t}$，在 $t\in[1, +\infty)$ 上恒成立，

令 $h(t)=\dfrac{e^t+2e^3}{t}$，$t\in[1, +\infty)$，

所以 $h'(t)=\dfrac{e^t \cdot t-(e^t+2e^3)}{t^2}=\dfrac{(t-1)e^t-2e^3}{t^2}$.

又令 $p(t)=(t-1)e^t-2e^3$，$t\in[1, +\infty)$，且 $p(3)=0$，

而 $p'(t)=te^t>0$，即 $p(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，

所以当 $t\in[1, 3)$ 时，$p(t)<0$，即 $h'(t)<0$，所以 $h(t)$ 在 $[1, 3)$ 上单调递减；

当 $t\in(3, +\infty)$ 时，$p(t)>0$，即 $h'(t)>0$，所以 $h(t)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增；

所以 $h(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $h(3)=e^3$，

所以 $a \leqslant e^3$. ………………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

（1）解：由点 P 为双曲线 C 的一点，则 $|PF_1-PF_2|=2a$，

所以 $PF_1^2+PF_2^2-2PF_1 \cdot PF_2=4a^2$.

又 $PF_1 \perp PF_2$，所以 $PF_1^2+PF_2^2=4c^2$，

所以 $PF_1 \cdot PF_2=2b^2$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2$，故而 $b^2=3$.

又 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，且 $c^2=a^2+b^2$，所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………（5 分）

（2）证明：设直线 AB 的方程为：$x=my-\sqrt{7}(m\neq 0)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，中点 $M(x_0, y_0)$，

直线 DE 的方程为：$x=m'y-\sqrt{7}(m'\neq 0)$，$D(x_3, y_3)$，$E(x_4, y_4)$，中点 $N(x_0', y_0')$，

由 AB 与 DE 垂直，所以 $mm'=-1$，

联立方程 $\begin{cases} x=my-\sqrt{7}, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 x 得：$(3m^2-4)y^2-6\sqrt{7}my+9=0$，

由题意需满足：$3m^2-4\neq 0$，

且 $\Delta=7\times 36m^2-4\times 9(3m^2-4)=36(4m^2+4)>0$，

所以 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{3\sqrt{7}m}{3m^2-4}$， $x_0=my_0-\sqrt{7}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3m^2-4}$.

同理：$y_0'=\dfrac{y_3+y_4}{2}=\dfrac{3\sqrt{7}m'}{3m'^2-4}$， $x_0'=m'y_0'-\sqrt{7}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3m'^2-4}$，

当 $m^2\neq 1$ 时，$k_{MN}=\dfrac{y_0-y_0'}{x_0-x_0'}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{m}{m^2-1}$，

故而直线 MN 为：$y=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{m}{m^2-1}\left(x-\dfrac{4\sqrt{7}}{3m^2-4}\right)+\dfrac{3\sqrt{7}m}{3m^2-4}$.

即：$\dfrac{4(m^2-1)}{m}y=x+4\sqrt{7}$，所以直线 MN 过定点 $(-4\sqrt{7},0)$，

当 $m^2=1$ 时，经检验，直线 MN 过定点 $(-4\sqrt{7},0)$，

综上所述，直线 MN 过定点 $(-4\sqrt{7},0)$. ………………………………………（12 分）