

重庆南开中学高 2021 级高三第七次质量检测

数学试题

2021.5

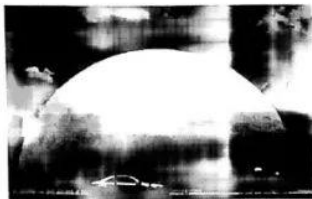
命审单位:重庆南开中学

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = a\sin x + \cos x$ 在点 $(0, f(0))$ 处切线和直线 $y = x - 2$ 垂直,则实数 a 的值为
A. 1 B. 2 C. -1 D. -2
2. 已知集合 $A = \{x | y = \log_2(-x^2 + x + 2)\}$, $B = \{y | y = \sqrt{1 - x^2}\}$, 则 $A \cup B =$
A. $(-1, 2)$ B. $(-1, 1]$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 2)$
3. 已知命题 p : 经过三点有且只有一个平面,命题 q : 过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直. 则下列复合命题为真命题的是
A. $p \wedge q$ B. $p \vee (\neg q)$ C. $p \vee q$ D. $p \wedge (\neg q)$
4. 生活中有很多球缺状的建筑. 一个球被平面截下的部分叫做球缺,截面叫做球缺的底面,球缺的曲面部分叫做球冠,垂直于截面的直径被截后的线段叫做球缺的高. 球冠的面积公式为 $S = 2\pi RH$,球缺的体积公式为 $V = \frac{1}{3}\pi(3R - H)H^2$,其中 R 为球的半径, H 为球缺的高. 现有一个球被一平面所截形成两个球缺,若两个球冠的面积之比为 1:3,则这两个球缺的体积之比为
A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{4}{27}$ C. $\frac{5}{27}$ D. $\frac{2}{9}$
5. 已知方程 $ax^2 + bx + 1 = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 在复数范围内有一根为 $1 + i$,则复数 $z = a + bi$ 在复平面上对应的点在
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
6. 已知 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$,则 $\sin\left(2\theta + \frac{5\pi}{6}\right) =$
A. $\frac{7}{9}$ B. $-\frac{7}{9}$ C. $-\frac{5}{9}$ D. $\frac{5}{9}$
7. 已知函数 $f(x)$ 对任意的实数 x 都满足 $f(x+4) + f(x) = 2f(2)$,且函数 $y = f(x-2)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称,若 $f(-1) + f(-2) = 2$,则 $f(2021) =$
A. 0 B. 2 C. -2 D. 2021



数学试题 第 1 页(共 4 页)

8. 已知 O 为坐标原点, 点 A 在直线 $l_1: x - y + c = 0$ 上, 点 B 在直线 $l_2: 2x - 2y + 3c = 0$ 上, 其中 c 为正数, $\triangle OAB$ 是以 O 为直角顶点的等腰三角形, 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{13}{2}$, 则 $c =$

- A. 1 B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 4

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是

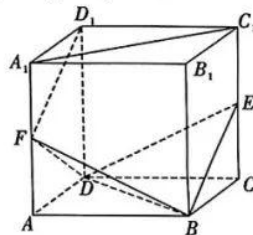
- A. 已知随机变量 $X \sim B(10, 0.4)$, 则 $DX = 2.4$
 B. 已知随机变量 X, Y 满足 $X + 2Y = 3$, 且 $X \sim N(2, 1)$, 则 $E(Y) = 1$
 C. 线性回归模型中, 相关系数 r 的绝对值越大, 则这两个变量线性相关性越强
 D. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 σ 越大, 正态分布曲线越矮胖

10. 抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ 具有共同的焦点 F , 过 F 作 C_2 的一条渐近线的垂线 l , 垂足为 H , l 与 C_1 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则有

- A. $p = \sqrt{6}$
 B. C_2 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$
 C. $OH = 3$
 D. 若 l 的倾斜角为锐角, 则经过 O, F 且与直线 l 相切的圆的标准方程为 $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 4$

11. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 CC_1, AA_1 的中点, 则下列说法正确的有

- A. 直线 A_1C_1 与直线 DE 共面
 B. $D_1F \parallel BE$
 C. 二面角 $E - BD - F$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$
 D. 直线 A_1C_1 与平面 EDB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



12. 已知函数 $f(x) = e^x, g(x) = \ln x, h(x) = \frac{a}{x}$, 其中 e 是自然对数的底数, a 为非零实数, 则下列说法正确的是

- A. 对任意的实数 a , 曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = h(x)$ 都有交点
 B. 当 $a = -\frac{1}{e}$ 时, 曲线 $y = g(x)$ 与曲线 $y = h(x)$ 恰好有一个交点
 C. 存在实数 a , 使得曲线 $y = h(x)$ 与曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 都有两个交点
 D. 设 $A(x_1, y_1)$ 是曲线 $y = h(x)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的一个交点, $B(x_2, y_2)$ 是曲线 $y = h(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 的一个交点, 则一定有 $x_1 x_2 = a$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意正整数 n 均有 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 成立, 且前 n 项和 S_n 满足 $S_5 = 15$, 则 $a_3 =$ _____.

14. 高三年级拍毕业照时, 某班甲、乙、丙 3 名同学邀请该班 2 名老师站在一排合影留念, 若 2 名老师相邻且不站在两侧, 则不同的站法有 _____ 种.

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, AC = 2, \angle BAC = 60^\circ$, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AC} (\lambda > 0, \mu > 0)$, 且 $\lambda\mu = \frac{1}{4}$, 则 $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最大值为 _____.

16. 李华以 18 km/h 的速度骑着一辆车轮直径为 24 寸(1 米等于 3 尺,1 尺等于 10 寸)的自行车行驶在一条平坦的公路上,自行车前轮胎上有一块红色的油漆印(图中点 A),则点 A 滚动一周所用的时间为_____秒(用 π 表示);若刚开始骑行时,油漆印离地面 0.6 米,在前行的过程中油漆印离地面的高度 h (单位:米)与时间 t (单位:秒)的函数关系式可以用 $h=f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+b$ ($A>0, \omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$)



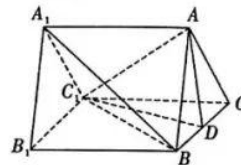
来刻画,则 $f(t)=$ _____。(填对任意一空得 3 分,两空都填对得 5 分)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, D 是 BC 的中点, $C_1D=2\sqrt{3}$.

(1) 求证: $A_1B \parallel$ 平面 AC_1D ;

(2) 当三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积最大时,求点 C 与平面 ABC_1 的距离.



18. (12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且满足 $a_1=3, a_n=xa_{n-1}+n-2$ ($n \geq 2$),其中 $x \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $x=1$,求 a_n ;

(2) 是否存在实数 x, y 使 $\{a_n+yn\}$ 为等比数列? 若存在,求出 S_n ;若不存在,说明理由.

19. (12 分)已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且满足 $a=2b\cos B$.

(1) 若 $C=\frac{\pi}{4}$,求角 A ;

(2) 若 $c=2, a\cos B=3$,求边长 b .

20. (12 分)为了庆祝建党 100 周年,某校高二年级将举行“学党史,忆先烈”党史知识竞赛,比赛以班为单位报名参赛(每班 10 人).为了帮助同学们学习并掌握更多的党史知识,学校准备了党史知识题库供学生利用课余时间进行网上练习.

(1) 经统计,高二年级有 400 名学生参与网上答题(其中物理类和历史类学生比例为 3:1),其得分情况可分为“优秀”和“良好”两个等级,请补全下面的“ 2×2 列联表”,并判断是否有 90% 的把握认为学生的党史知识掌握情况与学生的选科类别有关系?

	优秀	良好	总计
物理类	150		
历史类		40	
总计			400

数学试题 第 3 页(共 4 页)

(2) 某班为了选出参赛队员,将报名的 20 名学生平均分为甲、乙两组,利用班会课进行了 7 轮班内选拔比赛(每轮比赛每组满分 100 分),采用茎叶图记录了甲、乙两组 7 轮比赛得分如下图所示.已知甲组得分的中位数与乙组得分的平均数相等.

(i) 求 x 的值;

(ii) 根据甲乙两组的得分情况,应该选哪个组代表本班参加学校比赛? 并说明理由.

甲组		乙组
9	7	
9 4 3	8	x 4 5
8 7 3	9	1 2 4 6

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

21. (12 分) 设 $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 当 $x \geq 0$ 时, 求证: $f(x) \geq 0$;

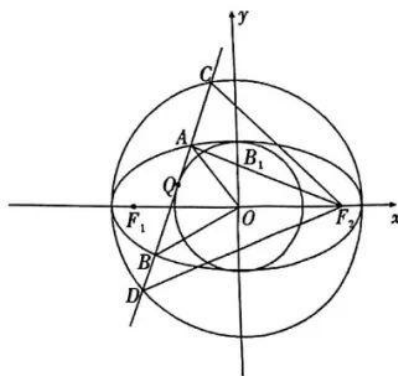
(2) 证明: 对一切正整数 n , 都有 $\sin 1 + \sin \frac{1}{2^2} + \sin \frac{1}{3^2} + \sin \frac{1}{4^2} + \dots + \sin \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$.

22. (12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 过圆 $C_1: x^2 + y^2 = b^2$ 上一点 Q (Q 在 y 轴左侧) 作该圆的切线, 分别交椭圆 E 于 A, B 两点, 交圆 $C_2: x^2 + y^2 = a^2$ 于 C, D 两点 (如图所示). 当切线 AB 与 x 轴垂直时, $\triangle CDF_2$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) (i) 求 $\triangle ABO$ 的面积的最大值;

(ii) 求证: $AC + AF_2$ 为定值, 并求出这个定值.



数学试题 第 4 页 (共 4 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》