

中学生标准学术能力诊断性测试 2019 年 9 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。



扫码查成绩

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x | x \geq 2\}$ ， $B = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$ ，则集合 $(C_U A) \cap B =$
- A. $\{x | 1 < x < 2\}$ B. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

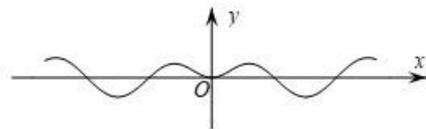
2. 已知 i 为虚数单位， $\frac{z}{i} = 1 - 2i$ ，则复数 z 的模为
- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 5

3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2) = 1$ ，设 $f(x_0) = y_0$ ，则“ $y_0 = 1$ ”是“ $x_0 = 2$ ”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 双曲线 $\frac{y^2}{m} - x^2 = n (m > 0, n < 0)$ 的离心率
- A. 与 m 有关，且与 n 有关 B. 与 m 无关，但与 n 有关
C. 与 m 有关，但与 n 无关 D. 与 m 无关，且与 n 无关

5. 已知 $x + 4y = 2 (x, y > 0)$ ，则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为
- A. 4 B. 6 C. $2 + 3\sqrt{2}$ D. $3 + 2\sqrt{2}$

6. 已知某函数图象如图所示，则此函数的解析式可能是
- A. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \sin x$ B. $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \cdot \sin x$
C. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \cos x$ D. $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \cdot \cos x$

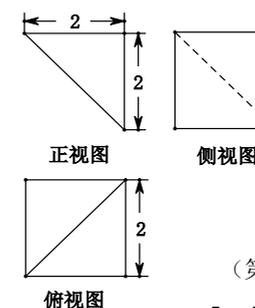


(第 6 题图)

7. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x$ 图像上各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)，再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，则所得函数图像的一个对称中心为
- A. $(2\pi, -1)$ B. $(-2\pi, -1)$ C. $(-2\pi, 0)$ D. $(2\pi, 0)$

8. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$
C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

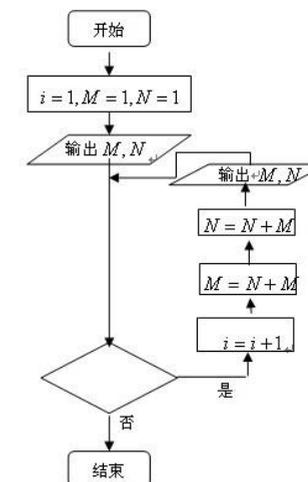


(第 8 题图)

9. 设函数 $f(x) = \cos \pi x$ ， $g(x) = t \cdot 2^x - \cos \frac{\pi}{3} (t \neq 0)$ ，若存在 $m, n \in [0, 1]$ ，使得 $f(m) = g(n)$ 成立，则实数 t 的取值范围是

- A. $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{3}{2}]$ B. $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{3}{4}]$ C. $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \frac{3}{2}]$ D. $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \frac{3}{4}]$

10. 设 $\{F_n\}$ 是斐波那契数列，则 $F_1 = F_2 = 1$ ， $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ，右图是输出斐波那契数列的一个算法流程图，现要表示输出斐波那契数列的前 30 项，那么在流程图中的判断框内应填写的条件是



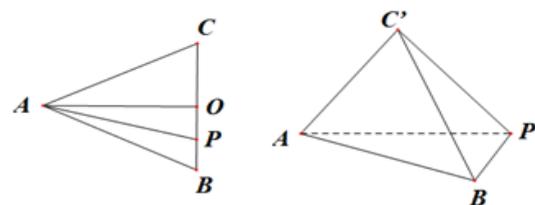
- A. $i \leq 15$
B. $i \leq 14$
C. $i \leq 29$
D. $i \leq 30$

11. 已知甲盒中有 2 个红球，1 个蓝球，乙盒中有 1 个红球，2 个蓝球，从甲乙两个盒中各取 1 球放入原来为空的丙盒中，现从甲盒中取 1 个球，记红球的个数为 ξ_1 ，从乙盒中取 1 个球，记红球的个数为 ξ_2 ，从丙盒中取 1 个球，记红球的个数为 ξ_3 ，则下列说法正确的是

- A. $E(\xi_1) > E(\xi_3) > E(\xi_2)$ ， $D(\xi_1) = D(\xi_2) > D(\xi_3)$
B. $E(\xi_1) < E(\xi_3) < E(\xi_2)$ ， $D(\xi_1) = D(\xi_2) > D(\xi_3)$
C. $E(\xi_1) > E(\xi_3) > E(\xi_2)$ ， $D(\xi_1) = D(\xi_2) < D(\xi_3)$

D. $E(\xi_1) < E(\xi_3) < E(\xi_2), D(\xi_1) = D(\xi_2) < D(\xi_3)$

12. 如图, 已知等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, O 为 BC 的中点, 动点 P 在线段 OB 上 (不含端点), 记 $\angle APC = \theta$, 现将 $\triangle APC$ 沿 AP 折起至 $\triangle APC'$, 记异面直线 BC' 与 AP 所成的角为 α , 则下列一定成立的是



(第 12 题图)

- A. $\theta > \alpha$ B. $\theta < \alpha$ C. $\theta + \alpha > \frac{\pi}{2}$ D. $\theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $5^a = 8^b = 10$, 则 $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, \frac{a_{n+1} + (n+2)}{a_n + (n+1)} = \frac{n+3}{n+1}$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____.

15. 已知边长为 2 的正方形 $ABCD$, E, F 分别是边 BC, DC 上的两个动点, $\vec{AE} + \vec{AF} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$, 若 $x + y = 3$, 则 $|\vec{EF}|$ 的最小值为 _____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, 过椭圆 C 的右焦点 F 作直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 y 轴于 M 点, 且点 B

在线段 FM 上, 则 $\frac{|MB|}{|BF|} - \frac{|MA|}{|AF|} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

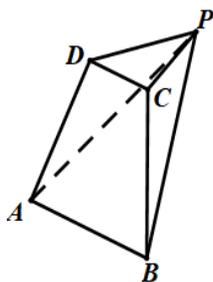
(一) 必考题: 60 分.

17. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且

$$\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 当 $a = \sqrt{7}, \sin(A+C) = \frac{\sqrt{21}}{14}$, 求 c 的值.



(第 18 题图)

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \perp$ 面 PCD , $CD \parallel AB$,

$AB = 2CD = 2, BC = PC = \sqrt{2}, PD \perp AB$.

- (1) 求 PD 的长;
(2) 求直线 AD 与面 PAB 所成角的正弦值.

19. (12 分) 若数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $\{S_n\}$, 且满足 $S_n = \frac{t}{t-1}(a_n - 2)$ (t 为常数, 且 $t \neq 0, t \neq 1$)

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

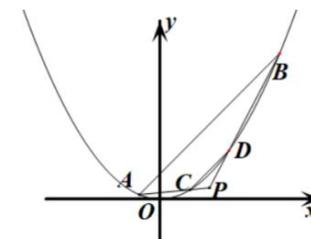
(2) 设 $b_n = 1 - S_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 令 $c_n = a_n |\log_3 b_n|$. 求证: $c_1 + c_2 + \dots + c_n < \frac{3}{2}$.

20. (12 分) 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{e^x}$. 若存在 $f(x_1) = f(x_2) = t$ (其中 $x_1 < x_2$)

- (1) 求实数 t 的取值范围; (2) 证明: $2x_1 x_2 < x_1 + x_2$.

21. (12 分) 如图, 已知抛物线 $x^2 = 4y$, 直线 $y = kx + 1$ 交抛物线于 A, B 两点, P 是抛物线外一点, 连接 PA, PB 分别交抛物线于点 C, D , 且 $CD \parallel AB$.

- (1) 若 $k = 1$, 求点 P 的轨迹方程;
(2) 若 $\vec{PC} = 2\vec{CA}$, 且 PA 平行 x 轴, 求 $\triangle PAB$ 面积.



(第 21 题图)

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为

极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{12}{3 + \sin^2 \theta}$.

- (1) 求曲线 C 的直角坐标方程;
(2) 设曲线 C 与直线 l 交于点 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 求证:

(1) $\frac{abc}{bc + ca + ab} \leq \frac{1}{9}$;

(2) 若存在非零实数 t , 使得不等式 $|tx - t| - |2t - 1| \geq |1 - t| + |2tx + 3t|$ 成立, 求实数 x 的取值范围.