姓名________ 座位号____________________________

（在此卷上答题无效）

数 学（理科）

本试卷共4页，23题（含选考题）。全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\left\{x\left|\frac{x-3}{x}\leqslant 0\right.\right\}$，$N=\{x\mid \lg(x^2+x+8)>1\}$，则 $M\cap N=$

A. $(0,1]$　　B. $(1,3]$　　C. $(0,2)$　　D. $(-2,1]$

2. 若复数 z 满足 $2z\cdot \mathrm{i}=a+\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$，i是虚数单位），且 $|z|=4$，则 $a=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $\pm3\sqrt{7}$　　D. $\pm7\sqrt{3}$

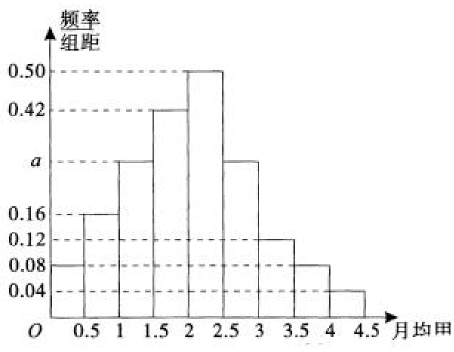
3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(-x),-1\leqslant x<0\\ \mathrm{e}^{ax},0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$（$a\in\mathbf{R}$，e是自然对数的底数）且 $f(1)=2$，则 $f(-\frac{1}{\mathrm{e}})-f(\log_4 3)=$

A. $-1-\sqrt{3}$　　B. $-1+\sqrt{3}$　　C. $1-\sqrt{3}$　　D. $1+\sqrt{3}$

4. 若数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，满足 $\frac{a_n^2}{a_{n+1}}=a_{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$），且 $a_{2020}=\frac{2}{15}$，$a_{2022}=\frac{2}{5}$，则 $a_{2021}=$

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{6}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{15}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

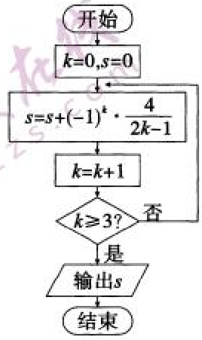
5. 我国是世界上严重缺水的国家，某市为了制定合理的节水方案，对居民用水情况进行了调查，通过抽样，获得了某年100位居民每人的月均用水量（单位：吨），将数据按照 $[0,0.5)$，$[0.5,1)$，…，$[4,4.5]$ 分成9组，制成了如图所示的频率分布直方图．则估计全市居民月均用水量的中位数是



A. 2.25吨　　B. 2.24吨

C. 2.06吨　　D. 2.04吨

6. 执行如图所示的程序框图，则输出 s 的值为



A. -4　　B. -8　　C. $-\frac{20}{3}$　　D. $-\frac{112}{15}$

7. 已知圆锥的顶点为 A，过母线 AB、AC 的截面面积是 $2\sqrt{3}$. 若 AB、AC 的夹角是 $60°$，且 AC 与圆锥底面所成的角是 $30°$，则该圆锥的表面积是

A. $2\sqrt{2}\pi$　　B. $(2\sqrt{3}+6)\pi$

C. $(4\sqrt{2}+6)\pi$　　D. $(4\sqrt{3}+6)\pi$

8. 设 $\omega>0$，将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+4$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3\omega}$ 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递减，则 $\omega=$

A. $6k-\frac{3}{2},k\in\mathbf{N}$　　B. $6k+\frac{3}{2},k\in\mathbf{N}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

9. 有 8 位学生春游，其中小学生 2 名、初中生 3 名、高中生 3 名. 现将他们排成一列，要求 2 名小学生相邻、3 名初中生相邻，3 名高中生中任意两名都不相邻，则不同的排法种数有

A. 288 种　　B. 144 种　　C. 72 种　　D. 36 种

10. 若关于 x 的不等式 $\frac{4x}{a}+\frac{1}{x-2}\geqslant 4$ 对任意 $x>2$ 恒成立，则正实数 a 的最大值是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 设 $a\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数，函数 $f(x)=e^x-a\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内有且仅有一个零点，则 $a=$

A. e^{π}　　B. -1　　C. $e^{\frac{\pi}{4}}$　　D. $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

12. 已知抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点 F 与双曲线 $16x^2-2y^2=1$ 的右焦点重合，斜率为 k 的直线 l 与 C 的两个交点为 A，B. 若 $|AF|+|BF|=4$，则 k 的取值范围是

A. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{5},+\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{5},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 命题"$\forall x\in\mathbf{R},x^2-2\geqslant\sqrt{2}x$"的否定是__________.

14. 设点 O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，$AB=3$，且 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-4$. 则 $\frac{\sin B}{\sin C}$ 的值是__________.

15. 如图 1，在一个正方形 $S_1S_2S_3S_4$ 内，有一个小正方形和四个全等的等边三角形. 将四个等边三角形折起来，使 S_1,S_2,S_3,S_4 重合于点 S，且折叠后的四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球的表面积是 16π（如图 2），则四棱锥 $S-ABCD$ 的体积是__________.

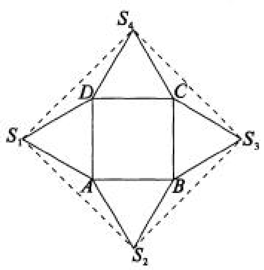


图1

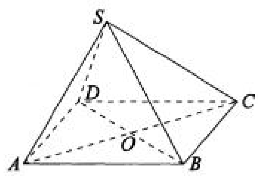


图2

16. 已知 S_n 是各项均不为零的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $S_{2n-1}=a_n^2(n\in\mathbf{N}^*)$. 若存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使不等式 $\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4a_5}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}\geqslant(\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{2}n)\lambda$ 成立，则实数 λ 的最大值是________.

三. 解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，向量 $\boldsymbol{m}=(2b+c,\sin C)$，向量 $\boldsymbol{n}=(\sin B,2c+b)$，且满足 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2a\sin A$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若△ABC 外接圆的半径是 1，求当函数 $f(B)=\cos 2B-4\cos A\sin B$ 取最大值时△ABC 的周长.

18. (12 分)

如图 3，在△ABV 中，$AC=BC=CV=1$，$AC\perp VB$ 于 C. 现将△ABV 沿 AC 折叠，使 V-AC-B 为直二面角(如图 4)，D 是棱 AB 的中点，连接 CD、VB、VD.

(1)证明：平面 $VAB\perp$平面 VCD；

(2)若棱 AB 上有一点 E 满足 $BE=\frac{1}{4}BA$，求二面角 C-VE-A 的余弦值.

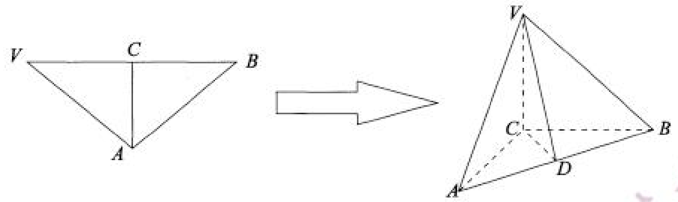


图3　　　　图4

19. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 中，以 $Q(-2,1)$ 为中点的弦 AB 所在直线的方程是 $x-2y+4=0$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设点 $P(m,0)$ 为椭圆 C 长轴上的一个动点，过点 P 作斜率为 $\frac{b}{2\sqrt{3}}$ 的直线 l 交椭圆 C 于 S,T 两点，证明：$|PS|^2+|PT|^2$ 为定值.

20. (12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-x$，其中 $a\geqslant 0$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若函数 $g(x)=f(x)+e^x+(1-a)x^2-\ln x$，证明：当 $x>0$ 时，$g(x)>\frac{1}{2}x^3+1$.

21.（12 分）

新冠肺炎，全民防控．冠状肺炎的感染主要是人与人之间进行传播，可以通过飞沫、粪便、接触等进行传染．冠状肺炎感染人群年龄大多是 40 岁以上的人群．该病毒进入人体后有潜伏期（潜伏期是指病原体侵入人体至最早出现临床症状的这段时期），潜伏期越长，感染到他人的可能性越高．现对 200 个病例的潜伏期（单位：天）进行调查，统计发现潜伏期的中位数为 5，平均数为 7.1，方差为 5.06．一般认为超过 8 天的潜伏期属于“长潜伏期”，按照年龄统计样本，得到下面的 2×2 列联表：

	长潜伏期	非长潜伏期
40 岁以上	30	110
40 岁及 40 岁以下	20	40

（1）能否有 95% 的把握认为“长潜伏期”与年龄有关？

（2）假设潜伏期服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数，σ^2 近似为样本方差．（ⅰ）很多省份对入境人员一律要求隔离 14 天，请用概率和统计的知识解释其合理性；（ⅱ）将样本频率近似当作概率，设另随机抽取的 25 个病例中属于“长潜伏期”的病例个数是 X，$X=k(k\in\mathbf{N}^*,0\leqslant k\leqslant 25)$ 的概率记作 $P(X=k)(k\in\mathbf{N}^*,0\leqslant k\leqslant 25)$，试求 X 的数学期望以及当 $P(X=k)$ 取最大值时 k 的值．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$，$\sqrt{5.06}\approx 2.25$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（10 分）**选修 4-4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos^k t\\ y=3\sin^k t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，且在两坐标系下长度单位相同．曲线 C_2 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta+5=0$.

（1）当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

（2）当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标．

23.（10 分）**选修 4-5：不等式选讲**

设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=|x-3|-|x+a|$.

（1）当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)>1$；

（2）若对于任意实数 x，不等式 $f(x)\leqslant 2a$ 恒成立，求 a 的取值范围．

理科数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	C	D	C	D	C	B	D	D	A

1.【解析】因为$M=\{x\mid 0<x\le 3\}$, $N=\{x\mid x^2+x-2>0\}=\{x\mid x<-2或x>1\}$,

所以$M\cap N=\{x\mid 1<x\le 3\}=(1,3]$.

2.【解析】因为$z=\frac{a+i}{2i}=\frac{(a+i)\cdot i}{-2}=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}i$, 所以$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}}=4, a=\pm 3\sqrt{7}$.

3.【解析】由$f(1)=2, a=\ln 2$. $f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & -1\le x<0,\\ e^{x\ln 2}, & 0\le x\le 1,\end{cases}$ 即$f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & -1\le x<0,\\ 2^x, & 0\le x\le 1,\end{cases}$

于是$f(-\frac{1}{e})-f(\log_4 3)=\ln\frac{1}{e}-2^{\log_4 3}=-1-\sqrt{3}$.

4.【解析】由条件$\frac{a_n^2}{a_{n+1}}=a_{n-1}$知，数列$\{a_n\}$是等比数列，则其公比满足$q^2=\frac{a_{2022}}{a_{2020}}=3, q=\sqrt{3}$.

因此$a_{2021}=a_{2020}q=\frac{2\sqrt{3}}{15}$.

5.【解析】由频率分布直方图可知，月用水量在[0, 0.5)的频率为 0.08×0.5=0.04.

同理，在[0.5, 1)，[1.5, 2)，[2, 2.5)，[3, 3.5)，[3.5, 4)，[4, 4.5]等组的频率分别为 0.08，0.21，0.25，0.06，0.04，0.02. 由 1−(0.04+0.08+0.21+0.25+0.06+0.04+0.02)=2×0.5×a，解得 a=0.30，设中位数为 x 吨. 因为前 5 组的频率之和为 0.04+0.08+0.15+0.21+0.25=0.73>0.5，而前 4 组的频率之和为 0.04+0.08+0.15+0.21=0.48<0.5，所以 2≤x<2.5. 由 0.50×(x−2)=0.5−0.48，解得 x=2.04.

6.【解析】$k=0$时，$s=-4$；$k=1$时，$s=-4-4=-8$；$k=2$时，$s=-8+\frac{4}{3}=-\frac{20}{3}$；

$k+1=3\ge 3$时. 此时退出循环，输出的$s=-\frac{20}{3}$.

7.【解析】设圆锥的母线长是l，则$\frac{1}{2}l^2\cdot\sin 60^\circ=2\sqrt{3}, l=2\sqrt{2}$. 则高是$\sqrt{2}$，圆锥底面半径是

$2\sqrt{2}\times\cos 30^\circ=\sqrt{6}$，于是该圆锥的表面积是$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}+\pi\cdot(\sqrt{6})^2=(4\sqrt{3}+6)\pi$.

8.【解析】由题意知，$g(x)=\sin(\omega x)$. 当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 取得最大值，所以 $\dfrac{\pi}{3}\cdot\omega=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z.$ 解得 $\omega=6k+\dfrac{3}{2},k\in N.$ 因为 $g(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 上递减，所以 $\dfrac{\pi}{\omega}\geq\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}$ 且 $\dfrac{\pi}{\omega}\geq\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}$，解得 $0<\omega\leq\dfrac{12}{5}.$ 因此 $\omega=\dfrac{3}{2}$.

9.【解析】第一步，先将 2 名小学生看成一个人，3 名初中生看成一个人，然后排成一排有 A_2^2 种不同排法；第二步，将 3 名高中生插在这两个整体形成的 3 个空档中，有 A_3^3 种不同排法；第三步，排 2 名小学生有 A_2^2 种不同排法，排 3 名初中生有 A_3^3 种不同排法. 根据分步计数原理，共有 $A_2^2A_3^3A_2^2A_3^3=144$ 种不同排法.

10.【解析】$\dfrac{4x}{a}+\dfrac{1}{x-2}\geq4\Leftrightarrow\dfrac{4(x-2)}{a}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{a}\geq4\Leftrightarrow\left[\dfrac{4(x-2)}{a}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{a}\right]_{\min}\geq4$，

即 $\Leftrightarrow\dfrac{4}{\sqrt{a}}+\dfrac{8}{a}\geq4$, 解得 $0<a\leq4$.

11.【解析】由 $e^x-a\sin x=0$ 得，$a\sin x=e^x$. 因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\sin x>0$. 因此 $a=\dfrac{e^x}{\sin x}$.

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{\sin x},0<x<\pi$, 则 $g'(x)=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$. 由 $g'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}$.

当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时 $g'(x)<0$；当 $\dfrac{\pi}{4}<x<\pi$ 时 $g'(x)>0$，所以 $g(x)_{\min}=g(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

因此 $a=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

12.【解析】双曲线的标准方程是 $\dfrac{\frac{x^2}{1}}{16}-\dfrac{\frac{y^2}{1}}{2}=1$，其右焦点是 $(\dfrac{3}{4},0)$. 所以 $\dfrac{p}{2}=\dfrac{3}{4},p=\dfrac{3}{2}$，抛物线 C 是 $y^2=3x$. 联立 $\begin{cases}y=kx+b\\y^2=3x\end{cases}$ 消去 y，化简整理得 $k^2x^2+(2kb-3)x+b^2=0$.

由 $\Delta=(2kb-3)^2-4\times k^2b^2>0$ 得，$12kb<9$，$kb<\dfrac{3}{4}$. 因为 $|AF|+|BF|=4$，所以

$x_1+x_2+\dfrac{3}{2}=4$，即 $x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$. 而 $x_1+x_2=-\dfrac{2kb-3}{k^2}$，即 $-\dfrac{2kb-3}{k^2}=\dfrac{5}{2}$，解得 $b=\dfrac{6-5k^2}{4k}$.

代入 $kb<\dfrac{3}{4}$ 得到，$k\cdot\dfrac{6-5k^2}{4k}<\dfrac{3}{4}$，$k<-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

13.【答案】$\exists x_0\in R$，$x_0{}^2-2<\sqrt{2}x_0$

14.【答案】$\dfrac{1}{3}$【解析】设点 D 是边 BC 的中点，则

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)$$

即 $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-9)=-4,\overrightarrow{AC}^2=1$. 故 $\dfrac{\sin B}{sinC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{3}$.

15.【答案】$\dfrac{16}{3}$【解析】在图 4 中，连接 AC,BD 交于点 O, 则 O 是正四棱锥外接球的球心，

正四棱锥的所有棱都相等，设其为 x, 则外接球的半径是 $OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$, 所以

$4\pi\,(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x)^2=16\pi$，$x=2\sqrt{2}$. 因此 $SO=OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=2$. 故四棱锥 $S-ABCD$ 的体积是

$\dfrac{1}{3}\cdot x^2\cdot SO=\dfrac{1}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times 2=\dfrac{16}{3}$.

16.【答案】$\dfrac{4}{45}$【解析】因为 $S_{2n-1}=\dfrac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}=(2n-1)a_n$，所以 $S_{2n-1}=a_n^2$ 就是

$(2n-1)a_n=a_n^2, a_n=2n-1, n\in N^*$. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 公差 $d=2$.

因为一般项 $\dfrac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{a_na_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}})$，

所以原式 $=\dfrac{1}{4}\left[(\dfrac{1}{a_1a_2}-\dfrac{1}{a_2a_3})+(\dfrac{1}{a_2a_3}-\dfrac{1}{a_4a_5})+\cdots+(\dfrac{1}{a_na_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}})\right]$

$=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{a_1a_2}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}})=\dfrac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)}$.

即 $\dfrac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)}\geq(\dfrac{1}{4}n^2+\dfrac{1}{2}n)\lambda$. 所以存在 $n\in N^*$, 使 $\lambda\leq\dfrac{4}{3(2n+1)(2n+3)}$ 成立，$\lambda\leq$

$\left[\dfrac{4}{3(2n+1)(2n+3)}\right]_{\max}=\dfrac{4}{45}$. 故实数 λ 的最大值是 $\dfrac{4}{45}$.

17.【解析】（1）由已知$\vec{m}\cdot\vec{n}=2a\sin A$，得 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$

再根据正弦定理有，$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，即 $a^2=b^2+c^2+bc$.

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\cos A=-\dfrac{1}{2}$

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………6 分

（2）由（1）知 $f(B)=\cos 2B+2\sin B=1-2\sin^2 B+2\sin B=-2(\sin B-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{2}$.

因为 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\sin B\in(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

因此当 $\sin B=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(B)$ 有最大值 $\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………9 分

此时 $a=2R\sin A=\sqrt{3}$，$b=c=2R\sin B=1$.

故 ΔABC 的周长是 $2+\sqrt{3}$. ……………………………………………………………12 分

18.【解析】（1）在图 4 中，∵AC=BC，D 是 AB 的中点，$\therefore CD\perp AB$.

又 $V-AC-B$ 为直二面角，$VC\perp AC$，$\therefore VC\perp$ 底面 ABC . ……………………………2 分

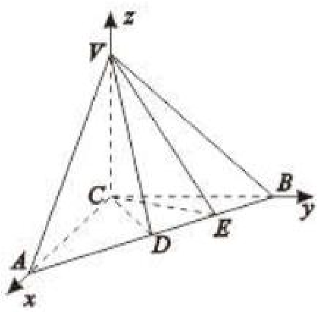
而 $AB\subset$ 平面 ABC，$\therefore VC\perp AB$，且 $VC\cap CD=C$，因此 $AB\perp$ 平面 VCD.

又 $AB\subset$ 平面 VAB，$\therefore$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD. ……………………………………………5 分

（2）以 CA、CB、CV 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$V(0,0,1)$，$\overline{CV}=(0,0,1)$

因为 $BE=\dfrac{1}{4}BA$，所以 $E(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},0)$，那么 $\overline{CE}=(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},0)$.



设平面 VCE 的法向量 $\vec{t}=(m,n,p)$，

由 $\overline{CV}\cdot\vec{t}=0$ 得，$p=0$. …………………………7 分

由 $\overline{CE}\cdot\vec{t}=0$ 得，$\dfrac{1}{4}m+\dfrac{3}{4}n=0$.

所以 $\vec{t}=(-3,1,0)$.

同理可以求得平面 VAB 的一个法向量 $\vec{s}=(1,1,1)$.………9 分

于是 $\cos<\vec{s},\vec{t}>=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{t}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{t}|}=\dfrac{|-3+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

又二面角 $C-VE-A$ 为锐角，所以二面角 $C-VE-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{15}$.……………12 分

19.【解析】(1) 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{12}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，相减得,

$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{12}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{12}$,

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{\frac{y_1+y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-0}=-\frac{b^2}{12}$. ……………………………………………………2 分

所以 $k_{AB}\cdot k_{OQ}=-\frac{b^2}{12}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}, b^2=3$.

故椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………5 分

(2) 设直线 $l: y=\frac{1}{2}(x-m)$ 交椭圆于 $S(x_1,y_1), T(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}(x-m)\\ x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 y 得，$2x^2-2mx+m^2-12=0$.

因此 $x_1+x_2=m, x_1x_2=\frac{m^2-12}{2}$. ……………………………………………………7 分

于是

$|PS|^2+|PT|^2=(x_1-m)^2+y_1^2+(x_2-m)^2+y_2^2$

$=\frac{5}{4}(x_1-m)^2+\frac{5}{4}(x_2-m)^2=\frac{5}{4}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2m(x_1+x_2)+2m^2\right]$

$=\frac{5}{4}(m^2-m^2+12-2m^2+2m^2)=15$.

故 $|PS|^2+|PT|^2$ 为定值，且为15. ……………………………………………………12 分

20.【解析】(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-1=\frac{2ax^2-x+1}{x}, x>0$. ……………………………1 分

若 $a=0$，$f'(x)=-\frac{x-1}{x}$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单增，在 $(1,+\infty)$ 内单减. ……………………………2 分

若 $a>0$，由 $2ax^2-x+1=0$ 知， $\Delta=1-8a$.

当 $\Delta=1-8a\le 0$, 即 $a\ge\frac{1}{8}$ 时， $2ax^2-x+1\ge 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单增. ……………3 分

当 $\Delta=1-8a>0$, 即 $0<a<\frac{1}{8}$ 时， $x=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4a}$.

此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a})$, $(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a},+\infty)$ 内单增，

在 $(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a},\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a})$ 内单减. ………………………………………………………5 分

（2）因为 $g(x)=f(x)+e^x+(1-a)x^2-\ln x=e^x+x^2-x$,

所以 $g(x)>\frac{1}{2}x^3+1$ 就是 $e^x+x^2-x>\frac{1}{2}x^3+1$, 即 $e^x+x^2-x-\frac{1}{2}x^3-1>0$.

令 $h(x)=e^x+x^2-x-\frac{1}{2}x^3-1, x>0$, 则 $h'(x)=e^x+2x-1-\frac{3}{2}x^2, x>0$,

$h''(x)=e^x+2-3x, x>0$.

由 $h'''(x)=e^x-3=0$ 得, $x=\ln 3$, $h''(\ln 3)$ 是 $h''(x)$ 的最小值. ……………………………8 分

于是 $h''(x)\ge h''(\ln 3)=5-3\ln 3>0$， $h'(x)$ 在 $x>0$ 时单增，

所以 $h'(x)>h'(0)=0$, $h(x)$ 在 $x>0$ 时单增.

故当 $x>0$ 时，$h(x)>h(0)=0$, 即 $g(x)>\frac{1}{2}x^3+1$. ……………………………………12 分

21.【解析】（1）$K^2=\frac{200(30\times 40-110\times 20)^2}{140\times 60\times 50\times 150}\approx 3.17$,

由于 $3.17<3.841$，故没有 95 % 的把握认为“长潜伏期”与年龄有关；…………………………3分

（2）（ⅰ）若潜伏期服从 $N(7.1,2.25^2)$， 由 $P(Z\ge 13.85)=\frac{1-0.9974}{2}=0.0013$，

得潜伏期超过 14 天的概率很低，因此隔离 14 天是合理的. ……………………………………6 分

（ⅱ）由于 200 个病例中有 50 个属于“长潜伏期”，将样本频率视作概率，一个患者属于“长潜伏期”的概率是 $\frac{1}{4}$， 又另随机抽取的 25 个病例中属于“长潜伏期”的病例个数是 X，

则 $X\sim B(25,\frac{1}{4})$， 则 $E(X)=\frac{25}{4}$， ………………………………………………………8 分

且 $P(X=k)=C_{25}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{25-k}$ $(k\in N^*, 0\le k\le 25)$.

由$\begin{cases} C_{25}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} \ge C_{25}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{26-k} \\ C_{25}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} \ge C_{25}^{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{24-k} \end{cases}$，得$\frac{11}{2} \le k \le \frac{13}{2}$，又$k \in N^*$，所以$k=6$.

故X的数学期望是$\frac{25}{4}$，$P(X=k)$取最大值时k的值为6 .……………………………12 分

22.【解析】（1）当$k=1$时，$\begin{cases} x=2\cos^k t \\ y=3\sin^k t \end{cases}$就是$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$，即$\begin{cases} \frac{x}{2}=\cos t \\ \frac{y}{3}=\sin t \end{cases}$. ………………2 分

因为$\sin^2 t+\cos^2 t=1$，所以$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

故曲线C_1是以坐标原点为中心，焦点在y轴上，长轴长为6，短轴长为4的椭圆. …………4 分

（2）当$k=4$时，$\begin{cases} x=2\cos^k t \\ y=3\sin^k t \end{cases}$就是$\begin{cases} x=2\cos^4 t \\ y=3\sin^4 t \end{cases}$，即$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{2}}=\cos^2 t \\ \sqrt{\frac{y}{3}}=\sin^2 t \end{cases}$.

因为$\sin^2 t+\cos^2 t=1$，所以$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}=1$，即为曲线$C_1$的普通方程. ……………………7 分

因为曲线C_2的极坐标方程为$2\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta+5=0$，

所以其直角坐标方程是$2x-8y+5=0$. ………………………………………………8 分

联立$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}=1 \\ 2x-8y+5=0 \end{cases}$解得，$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$. 故$C_1$与$C_2$的公共点的直角坐标是$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$…………10 分

23.【解析】（1）$a=2$时，不等式$f(x)>1$就是$|x-3|-|x+2|>1$.

因为$f(x)=\begin{cases} 5, & x<-2 \\ -2x+1, & -2\le x<3 \\ -5, & x\ge 3 \end{cases}$，

所以$f(x)>1$等价于$\begin{cases} x<-2 \\ 5>1 \end{cases}$或$\begin{cases} -2\le x<3 \\ x<0 \end{cases}$或$\begin{cases} x\ge 3 \\ -5>1 \end{cases}$，因此$x<0$.

故不等式$f(x)>1$的解集是$(-\infty,0)$. …………………………………………

（2）因为$|a|-|b|\le|a-b|$,所以$f(x)=|x-3|-|x+a|\leqslant|(x-3)-(x+a)|=|a+3|$.

因此$f(x)$的最大值为$|a+3|$.

则对于任意实数x，$f(x)\leqslant 2a$恒成立等价于$|a+3|\leqslant 2a$. ……………………………………8分

当$a\geqslant -3$时，$a+3\leqslant 2a$，得$a\geqslant 3$；当$a<-3$时，$-a-3\leqslant 2a$，$a\geqslant -1$，不成立.

综上可知，a的取值范围是$[3,+\infty)$. ……………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》